

### **Реч аутора**

Свеска припрема за други разред средње школе је написана према наставним плановима и програмима са 4 и 5 часова наставе недељно. Аутори су је замислили као помоћ наставницима која може да се мења и надограђује зависно од потреба одељења у којима се настава изводи. На крају сваке припреме, где год је то било могуће, остављено је место за коментаре и идеје за унапређење часа.

У Панчеву  
августа 2016.

Нада Ранковић  
Љиљана Ђуретановић  
Наташа Зечевић



**Свеска припрема  
Математика за други разред средње школе**

**1. Степеновање и кореновање**

*Извод из наставних планова и програма:*

**Степеновање и кореновање – препоручени садржацији**

*Степен чији је изложилац цео број, операције; децимални запис броја у стандардном облику. Функција  $y=x^n$ ,  $n \in N$  и њен график.*

*Корен; степен чији је изложилац рационалан број. Основне операције са коренима.  
Комплексни бројеви и основне операције са њима.*

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Појам и особине степена. Операције са степенима

**Тип часа:** комбиновани: обрада новог градива, понављање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увођење и понављање степена реалног броја природним бројем

**Образовни задатак:** Научити ученике особинама операција са степенима и упрошћавањима израза који садрже степене.

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** увежбавање рачунских операција са степенима

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА1.1.1. Користи природне, целе, рационалне и реалне бројеве, различите записи тих бројева и преводи их из једног записа у други

2.МА.1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, база, изложилац

### Уводни део часа 10 минута:

Представљање наставника.

Препоручити уџбеник и збирку задатака за ученике, обавестити ученике о планираним наставним темама, распореду писмених провера, допунске и додатне наставе и осталим информацијама од важности за наставни процес.

*Ученици су се у основној школи упознали са степеновањем природним бројем. Неопходно је поновити научено градиво, освежити сећање и поново дефинисати степеновање и особине операција са степенима. Овде би било пожељно укључити ученике у дискусију.*

### Главни део часа: 30 минута

\*  $a^n$  се зове n-ти степен, при чему број  $a$  зовемо основа или база, а број  $n$  изложилац или експонент. Степен је скраћени запис множења броја самим собом.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, \quad \text{Дефиниција: } a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \quad a \in R, \\ n \in N$$

\* Основне особине операција са степенима:  $a, b \in R, n, m \in N, m < n$

1. Производ два различита броја са истим изложиоцем  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ puta}} \times \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ puta}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ puta}} = (a \cdot b)^n$$

операција степеновања је дистрибутивна у односу на операцију множења

$$\text{Пример 1. } 3^4 \cdot 2^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$$

2. Количник два различита броја са истим изложиоцем  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ puta}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ puta}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ puta}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad a \neq 0, b \neq 0$$

**Пример 2.**  $\frac{20^3}{5^3} = \frac{20 \cdot 20 \cdot 20}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{20}{5} \cdot \frac{20}{5} \cdot \frac{20}{5} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

3. Производ степена који имају исту базу, а различит изложилац:  
 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ puta}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ puta}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ puta}} = a^{n+m}$$

**Пример 3.**  $2^5 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_5 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_3 = 2^8$

4. Количник степена који имају исту базу, а различит изложилац:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ puta}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ puta}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n-m \text{ puta}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^m}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ puta}}} = a^{n-m} \quad a \neq 0$$

**Пример 4.**  $\frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^2$

5. Степеновање степена  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$$(a^n)^m = \underbrace{\left( \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ puta}} \right)}_{m \text{ puta}}^m = \underbrace{\left( \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ puta}} \right)}_m \cdot \underbrace{\left( \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ puta}} \right)}_m \cdot \dots \cdot \underbrace{\left( \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ puta}} \right)}_m = \underbrace{\left( \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \cdot m \text{ puta}} \right)}_{m \text{ puta}} = a^{n \cdot m}$$

Из наведеног следи да је степеновање степена комутативно:  $(a^n)^m = (a^m)^n$

**Пример 5.**

$$(2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^4 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = (2^4)^3$$

Напомена: Важно је скренути ученицима пажњу да  $(a^n)^m$  није исто што и  $a^{nm}$ .

**Пример 6.**  $(2^3)^4 \neq 2^{3^4}$

$$(2^3)^4 = 2^{12} \quad 2^{3^4} = 2^{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 2^{81}$$

Степеновање није дистрибутивно у односу на сабирање  $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

**Пример 7.**  $(2+5)^2 \neq 2^2 + 5^2$

$$(2+5)^2 = 7^2 = 49 \quad 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$$

1. Израчунати 1)  $2^7 : 4^2$       2)  $\frac{2^{15} : 4^3}{8^2}$       3)  $\left( (a^3)^2 \right)^9 - a^{60} : a^5$   
 4)  $2^{2^3}$       5)  $(2^2)^3$       6)  $(0,25 \cdot 8)^5$

2. Изврши множење  $(a+b)^6 \cdot (a+b)^3$

3. Напиши у облику степена броја два    а) 512    б) 1024    в)  $6 \cdot 2^6 + 20 \cdot 2^5$   
4. Помножи степене  $2^{3n} \cdot 3^{2n}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак:

1) $\frac{3^{14} : 9^3}{27^2}$	2) $\frac{(2+3)^3 \cdot 4^2}{10^4}$	3) $\frac{4^{3n} \cdot 3^{2n}}{24^{2n}}$
4) $3^{2^2}$	5) $(3^2)^2$	

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Појам и особине степена. Операције са степенима

**Тип часа:** Комбиновани: обрада новог градива, понављање и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Утврђивање појма и операција степена реалног броја природним бројем са освртом на степен негативног броја

**Образовни задатак:** Научити ученике особинама операција са степенима и упрошћавањима израза који садрже степене са посебним освртом на степен негативног броја

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** увежбавање рачунских операција са степенима

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА1.1.1. Користи природне, целе, рационалне и реалне бројеве, различите записи тих бројева и преводи их из једног записа у други

2.МА1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, база, изложилац

### Уводни део часа 5 минута:

Контрола домаћег задатка и понављање операција са степенима постављањем питања ученицима

### Главни део часа: 35 минута

\* Особине степена:

Ако је  $a = 0$ , следи  $a^n = 0$

Ако је  $a > 0$ , следи  $a^n > 0$

$$a, b \in R^+ \quad \left( a = b \quad \text{ако и само ако} \quad a^n = b^n \right)$$

$$a, b \in R^+ \quad \left( a < b \quad \text{ако и само ако} \quad a^n < b^n \right)$$

Ако је  $a \in R^-$ , онда важи  $\left( n \text{ паран, следи} \quad a^n > 0 \right) \text{ и } \left( n \text{ непаран, следи} \quad a^n < 0 \right)$

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$$

$$(-1)^{2015} = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (-1)}_{2015} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{1007} \cdot (-1) = -1$$

**Задаци:**

1. Израчунај: 1)  $\frac{(-2)^{17} : 4^2}{(-8)^3}$  [16]

2)  $\left( \left( (-2)^2 \right)^9 : (-4)^5 \right)^2 : (-4)^7$  [-4]

3)  $\frac{(-2)^{2016} \cdot (-2)^{2015}}{4^{2014}}$  [-8]

2. Ако је  $x = -0,2$  поређај по величини бројеве  $x, x^2, x^3$

3. Упрости израз и запиши услове под којима је дефинисан

a)  $\left( \frac{27a^2 \cdot (a-1)}{8x^3 \cdot (a+1)} \right)^5 \cdot \left( \frac{2x}{3} \right)^{15} \cdot \left( \frac{a+1}{a} \right)^{10}$  б)  $\left( \left( \frac{4a^2}{9x^4} \right)^3 : \left( \frac{2a^3}{3x^2} \right)^4 \right)^2 \cdot \frac{9x^8 a^{12}}{8}$

4. Скрати разломке: а)  $\frac{5^n + 5^{n+2}}{5^{n+1} + 5^{n+2}}$  б)  $\frac{10^{n+1} - 10^n}{2 \cdot 10^n + 10^{n+1}}$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак: 1)  $\frac{(-3)^{16} : 9^2}{(-27)^3}$  [-27]

2)  $\frac{(-3)^{200} \cdot (-3)^{201}}{9^{202}}$   $[-\frac{1}{27}]$

3)  $\left( \left( (-3)^2 \right)^{11} : (-9)^5 \right)^2 : (-9)^7$   $[-9^5]$

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Појам и особине степена. Операције са степенима

**Тип часа:** обрада новог градива

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увођење степена реалног броја целим бројем

**Образовни задатак:** Научити ученике особинама операција са степенима који имају цео изложилац и упрошћавању израза који садрже степене.

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** увежбавање рачунских операција са степенима који имају целобројни изложилац

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА1.1.1. Користи природне, целе, рационалне и реалне бројеве, различите записи тих бројева и преводи их из једног записа у други

2.МА1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, уз помоћ наставника раде задатке и изводе тврђења

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, база, изложилац

### Уводни део часа 5 минута

Контрола домаћег задатка. Понављање појма степена и особина операција са степенима.

*Намеће се потреба за проширивањем скупа коме припада изложилац степена и овде се предвиђа укључивање ученика у закључивање до каквих промена у операцијама и дефинисаности степена долази увођењем целог и рационалног експонента. Овде би било пожељно навести ученике на самосталан рад, чиме би се активирала њихова мисаона активност и креативност. Истовремено се таквим радом понављају скупови бројева и вежба строга математичка прецизност у раду са њима.*

### Главни део часа: 35 минута

#### Пример 1.

$$8 : 8 = 1 \quad 2^3 : 2^3 = 1 \quad a^n : a^n = 1 \quad a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$$

Дефиниција:  $a^0 = 1$  за  $a \neq 0$

**Пример 2.**

$$9 : 27 = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \quad 9 : 27 = 3^2 : 3^3 = 3^{2-3} = 3^{-1} \quad \text{дакле, закључујемо} \quad 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$3^2 \cdot 3^{-2} = 3^0 = 1 \quad \text{из } 3^2 \cdot 3^{-2} = 1 \quad \text{следи } 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

Аналогно:  $a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$  из наведеног  
закључујемо:

Дефиниција:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$\text{Пример 3.} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{дакле, закључујемо} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$n \in N, a \neq 0, b \neq 0$

Задаци: Израчунати:

$$1) (-\sqrt{5})^0 + 3^{-2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \quad [2]$$

$$2) (2000^3)^0 + 0,1^{-2} \cdot 10^{-1} \quad [11]$$

$$3) \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot 2^{-2} \quad [3]$$

$$4) \left(\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^{-2}\right)^{-3} \quad [8]$$

$$5) \frac{2^{-2} + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0}{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} \quad [7]$$

$$6) \frac{3^{-2} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} \cdot 10^{-5}}{2 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{-1} \cdot 0,0001} \quad [\frac{5}{9}]$$

$$7) 0,1^{-4} + 0,01^{-3} + 0,001^{-2} + 0,0001^{-1} + 0,00001^0 \quad [2002000]$$

$$8) 0,5^{-4} + 0,25^{-3} + 0,125^{-2} + 0,0625^{-1} + 0,00001^0 \quad [161]$$

$$9) 1^{-1} + 2^{-2} + 3^{-3} + (-1)^{-1} + (-2)^{-2} + (-3)^{-3} \quad [\frac{1}{2}]$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 1, 2

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Појам и особине степена. Операције са степенима

**Тип часа:** понављање и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увежбавање операција степена реалног броја целим бројем

**Образовни задатак:** Научити ученике да упрошћавају изразе који садрже степене.

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** увежбавање рачунских операција са степенима који имају целобројни изложилац

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА1.1.1. Користи природне, целе, рационалне и реалне бројеве, различите записи тих бројева и преводи их из једног записа у други

2.МА1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, уз помоћ наставника раде задатке и изводе тврђења

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић,

**Кључни појмови:** степен, база, изложилац

### Уводни део часа 5 минута:

Анализа домаћег задатка. Понављање основних закључака са предходног часа.

### Главни део часа: 35 минута

1. Израчунај вредност израза  $3a^2 - 7a + 1,75$  ако је  $a = 5 \cdot 10^{-1}$  [1]
  
2. Упрости израз:  $A = \frac{((-12)^{-8})^{-2} \cdot 75^{-1} \cdot (-144)^0}{(25^{-2})^4 \cdot 18^6 \cdot 10^4}$
  
3. Ако је  $a = 5^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$  и  $b = 10^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$  израчунати  $ab^{-1}$ . [200]
  
4. Упореди: а)  $2^{24}$  и  $3^{16}$       б)  $125^{-2}$  и  $\left(\frac{1}{36}\right)^3$
  
5. (5, збирка)    Ѯ)  $2x^{2a-3b} \cdot 3x^{b-a} \cdot 5x^{4a+2b}$  [  $30x^{5a}$  ]  
 3)  $(m^{-2})^3 \cdot (m^3)^{-2} \cdot (m^{-4})^2$  [  $m^{-20}$  ]

6. Упрости израз: 1)  $\left(\frac{y^{-2}}{x^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{x^{-1}}{y^2}\right)^{-3}$       2)  $\left(\left(\frac{3x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{9x^{-1}}{5y^{-3}}\right)^{-2}\right) \cdot \frac{x^{-6}y}{15}$

3)  $\left(\left(\frac{2a^{-2}}{3ab^{-3}}\right)^{-4} : \left(\frac{4a^{-2}}{3b^{-3}}\right)^{-2}\right) \cdot \frac{1}{12a^5b^{-2}}$        $\left[\frac{3a^3}{4b^4}\right]$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 3, 4, 6. в,г)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Операције са степенима и алгебарским разломцима

**Тип часа:** понављање и утврђивање

**Облик рада:** фронтални и индивидуални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увежбавање операција степена реалног броја целим бројем уз понављање упрошћавања алгебарских израза

**Образовни задатак:** Научити ученике да упрошћавају изразе који садрже степене.

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** увежбавање рачунских операција са степенима који имају целобројни изложилац и увежбавање упрошћавања рационалних алгебарских израза који садрже степене са целобројним изложиоцем

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА1.1.1. Користи природне, целе, рационалне и реалне бројеве, различите записи тих бројева и преводи их из једног записа у други

2.МА1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, подстиче ученике на самосталан рад, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, уз помоћ наставника или самостално раде задатке

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, база, изложилац

### Уводни део часа 10 минута:

Анализа домаћег задатка. Ученик, добровољац, самостално на табли решава задатак:

$$\text{Упрости израз: } \left( \frac{2a^n b^{2n}}{c^{15}} \right)^2 : \left( \frac{3ab^3}{c^4} \right)^n$$

### Главни део часа: 30 минута

1. Ако је  $a \in R \setminus \{0\}$ ,  $b \in R \setminus \{0\}$  и  $a \neq b$  упрости израз  $\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}}$ .

$$\text{Решење } \frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{b+a}{b-a}.$$

2. Упрости израз:  $\frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \cdot \left( \frac{a^2 + b^2}{ab} \right)^{-1}$ , ако је  $a, b \in R \setminus \{0\}$

$$\text{Решење } \frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \cdot \left( \frac{a^2 + b^2}{ab} \right)^{-1} = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{\frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2}}{\frac{b+a}{ab}} \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{1}{b+a}.$$

3. Упрости израз:  $\left( \left( \frac{x^2 - 1}{9x^2 - 1} \right)^{-n} : \left( \frac{x-1}{3x+1} \right)^{-n} \right) \cdot \left( \frac{3x-1}{x+1} \right)^{-n}$ , ако је

$$x \in R \setminus \left\{ -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right\}$$

4. Ако су  $a$  и  $b$  реални бројеви такви да је  $|a| \neq |b|$  и  $ab \neq 0$ , упрости израз

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^{-1} : \frac{ab}{a^3 + b^3} + \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1} \cdot (a - b)$$

5. Упрости израз:  $\frac{x^{-4} - 25y^{-2}}{x^{-2} - 5y^{-1}} \cdot x^2 y \cdot (y + 5x^2)^{-2}$   $x, y \in R \setminus \{0\}$

6. Упрости израз:  $\left( \frac{x - x^{-2}}{x^{-2} + x^{-1} + 1} - \frac{x - x^{-1}}{1 + x^{-2} + 2x^{-1}} \right) : \frac{1 - x^{-1}}{1 + x^{-1}}$ ,  $x \in R \setminus \{1, 0, 1\}$

Решење:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x - x^{-2}}{x^{-2} + x^{-1} + 1} - \frac{x - x^{-1}}{1 + x^{-2} + 2x^{-1}} \right) : \frac{1 - x^{-1}}{1 + x^{-1}} = \left( \frac{x - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}} \right) : \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \\ & = \left( \frac{\frac{x^3 - 1}{x^2}}{\frac{1 + x + x^2}{x^2}} - \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2}} \right) : \frac{\frac{x - 1}{x}}{\frac{x + 1}{x}} = \left( \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - \frac{x(x-1)}{x+1} \right) : \frac{x-1}{x+1} = \\ & = \frac{(x-1)(x+1) - x(x-1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1-x)}{x-1} = 1 \end{aligned}$$

### Завршни део часа: 5 мин

Домаћи задатак из збирке: 9

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Операције са степенима и алгебарским разломцима

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** рад у групи ( 5 група)

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Увежбавање операција степена реалног броја целим бројем уз понављање упрошћавања алгебарских израза

**Образовни задатак:** Научити ученике да самостално упрошћавају изразе који садрже степене.

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема. Развијање комуникационих вештина.

**Функционални задатак:** увежбавање рачунских операција са степенима који имају целобројни изложилац и увежбавање упрошћавања рационалних алгебарских израза који садрже степене са целобројним изложиоцем

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА1.1.1. Користи природне, целе, рационалне и реалне бројеве, различите записи тих бројева и преводи их из једног записа у други

2.МА1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Врши поделу ученика на групе, задаје задатке и на крају часа координира упоређивање резултата рада.

**Активност ученика:** раде задатке у сарадњи са ученицима из групе

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, база, изложилац

### Уводни део часа: 5 минута

Анализа домаћег задатка и подела ученика у пет група према унапред припремљеном плану наставника како би групе биле хетерогене по нивоу знања градива. Затим свака група добија папир који ће након завршеног рада предати наставнику.

### Главни део часа: 35 минута

Рад у групи траје 25 минута.

1. (10. збирка): Упрости израз:

$$\text{г) } \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \left( \frac{a^2 - b^2}{ab} \right)^{-1} \quad ab \neq 0, |a| \neq |b|$$

2. (11. збирка): Упрости изразе:

$$\text{а) } \left( \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \right)^2$$

$$\text{б)} \frac{2^{-2x} - 2^{-x} - 6}{2^{-2x} - 4} + \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} - 2} - 2 \quad , \quad x \neq 1$$

3. (13. збирка): Израчунати: б)  $(x + x^{-1}) : (x - x^{-1})$ , ако је  $x = \frac{2^{-n} + 1}{2^{-n} - 1}$   
 в)  $\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}} \left( 1 - \frac{2x-1}{x} \right)$ , ако је  $x = \left( \frac{2}{a-1} \right)^{-1}$ ,  $a \neq 1, a \neq 3$

Наставник на крају рада група преко презентације приказује решења задатих примера и врши оцењивање рада групе при чему се вреднује активност појединца, тачност и брзина. Након завршеног рада ученицима се враћају предати задаци и врши се корекција грешака уколико постоје.

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 10. а, б, в), 11. б, г)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Децимални запис броја у стандардном облику

**Тип часа:** комбиновани: обрада новог градива и утврђивање

**Облик рада:** фронтални и индивидуални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** радни листићи

**Циљ часа:** Увођење записа децималног броја у тзв. стандардном облику

**Образовни задатак:** Научити приказ броја у стандардном облику

**Васпитни задатак:** Развијање уредности, систематичности и прегледног записивања бројевних израза, јачање самопоуздања ученика приликом рада са бројевним изразима.

**Функционални задатак:** развијање способности за посматрање, опажање, развијање прецизности

Стандард уз наставну јединицу:

2.МА.1.1.1. Користи природне, целе, рационалне и релане бројеве, различите записи тих бројева и преводи их из једног записа у други

2.МА.1.1.3. Примењује правила заокругљивања бројева и процењује вредност израза у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** стандардни облик броја

### Уводни део часа 10 минута:

Увод у тему и мотивациони разговор. (записивање децималног броја у стандардном облику је посебно применљиво у хемији и физици, где наведени запис омогућава лакше праћење реда величине бројева)

Контрола домаћег задатка.

Подела наставних листића на којима су текстови задатака предвиђени за ову наставну јединицу.

Ученици су се у основној школи упознали са децималним записом реалног броја.

На пример број 12536 можемо записати као  $12536 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1$ .

На исти начин можемо записати и број 25,301 као

$$25,301 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$$

### Главни део часа: 30 минута

Запис позитивног реалног броја  $x$  у облику  $x = a \cdot 10^k$  где је  $1 \leq a < 10$  и  $k \in Z$  је децимални запис броја  $x$  у стандардном облику

- Следеће бројеве написати у облику  $a \cdot 10^k$ , где је  $1 \leq a < 10$  и  $k$  цео број:

a)  $0,001 = 1 \cdot 10^{-3}$       б)  $0,00001 = 1 \cdot 10^{-5}$       в)  $0,06 = 6 \cdot 10^{-2}$       г)  $0,028 = 2,8 \cdot 10^{-3}$   
 д)  $325,28 = 3,2528 \cdot 10^2$       ђ)  $10000 = 1 \cdot 10^4$       е)  $12200 = 1,22 \cdot 10^4$

2. Израчунати вредност израза

$$A = \frac{2,25 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-5}} = \frac{2,25 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-5}} = \frac{9 \cdot 10^{-7}}{1,2 \cdot 10^{-5}} = 7,5 \cdot 10^{-2}$$

3. Следеће бројеве написати у облику  $a \cdot 10^k$ , где је  $1 \leq a < 10$  и к цео број:

а)  $\frac{300^5 \cdot 0,003^2}{9000^3} = \frac{(3 \cdot 10^2)^5 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2}{(9 \cdot 10^3)^3} = \frac{3^5 \cdot 10^{10} \cdot 3^2 \cdot 10^{-4}}{9^3 \cdot 10^9} = \frac{3^7 \cdot 10^6}{3^6 \cdot 10^9} = 3 \cdot 10^{-3}$   
 б)  $\frac{0,04^2 \cdot 0,0006^5}{0,024^3} = \frac{(4 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (6 \cdot 10^{-4})^5}{(24 \cdot 10^{-3})^3} = \frac{4^2 \cdot 10^{-4} \cdot 6^5 \cdot 10^{-20}}{24^3 \cdot 10^{-9}} =$   
 $= \frac{2^4 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 10^{-24}}{(8 \cdot 3)^3 \cdot 10^{-9}} = \frac{2^9 \cdot 3^5 \cdot 10^{-24}}{2^9 \cdot 3^3 \cdot 10^{-9}} = 3^2 \cdot 10^{-15}$

4. (Пријемни испит, ЕТФ 2015) Ако је к цео број и  $0,0010101 \cdot 10^k > 1001$  која је најмања вредност броја  $k$ ?

$1001 = 0,001001 \cdot 10^6$ , закључујемо: најмања вредност броја  $k=6$ .

5. Колико је растојање између Сунца и Плутона, ако је то растојање 40 пута веће од растојања између Земље и Сунца? Познато је да је растојање између Земље и Сунца  $1,495 \cdot 10^8 \text{ km}$

$$40 \cdot 1,495 \cdot 10^8 = 4 \cdot 10 \cdot 1,495 \cdot 10^8 = 5,98 \cdot 10^9$$

6. (Пријемни испит, ЕТФ 2006) Ако је  $\frac{0,0015 \cdot 10^m}{0,03 \cdot 10^k} = 5 \cdot 10^7$  одреди вредност разлике  $m-k$ .

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак: (задаци су наведени као радни материјал на наставним листићима)

1. Следеће бројеве написати у облику  $a \cdot 10^k$ , где је  $1 \leq a < 10$  и  $k$  цео број

- а) Површину Земље која је  $510083000 \text{ km}^2$   
 б) Масу Земље која је  $6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ t}$   
 в) Масу атома водоника која је  
 $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,7 \text{ g}$

2. Изразити масу у грамима и добијене бројеве записати у стандардном облику

- а)  $87,5 \text{ kg}$       б)  $523,4 \text{ t}$

3. Поновити појмове функција, бијекција, инверзна функција, композиција функција

[www.bojanke.com/images/planeta\\_zemlja](http://www.bojanke.com/images/planeta_zemlja)



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Појам и особине функције

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Усвајање особина реалних функција;

**Образовни задаци:** Научити ученике да дефинишу реалне функције, дефинишу график функције, наброје особине реалних функција, да уоче графички приказ истих и да на примерима функција објасне особине функције

**Васпитни задаци:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање способности запажања. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Проширивање знања ученика о реалним функцијама, развијање способности ученика за синтезу, односно обједињавање делова у целину

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА1.3.3. Анализира графички представљене функције ( одређује нуле, знак, интервале монотоноти, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту)

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом дискусије, дискутује презентацију

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, прате презентацију

**Литература:** Презентација која се налази на сајту школе

**Кључни појмови:** функција, график, нуле, знак, парност, минимум, максимум

### Уводни део часа 10 минута:

Контрола домаћег задатка.

*Функција је један од најважнијих математичких појмова. Ученици су се са појмом функције срели у првом разреду када су радили појам бијекције, инверзне функције и композиције функција. У уводном делу часа наставник подсећа ученике на наведене појмове и кроз дијалог проверава колико се ученици сећају наведеног градива.*

Ако имамо функцију  $f: A \rightarrow B$ , онда скуп  $A$  називамо домен или област дефинисаности, а скуп  $B$  кодомен или скуп у коме функција узима вредност, а  $f$  је правило по коме се сваком елементу  $x \in A$  додељује тачно један елемент из скupa  $y \in B$ . Записујемо  $y = f(x)$ ,  $x \in A$ . График функције је скуп тачака у равни  $xOy$ :  $\{(x, y) | x \in D, y = f(x)\}$

### Главни део часа: 30 минута

Испитиваћемо неке особине функција:

(презентација, која се поставља на сајт школе)

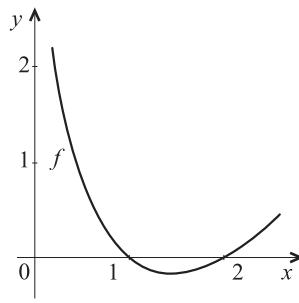
Нека је  $f: D \rightarrow R$ , реална функција реалне

променљиве,  $D \subset R$

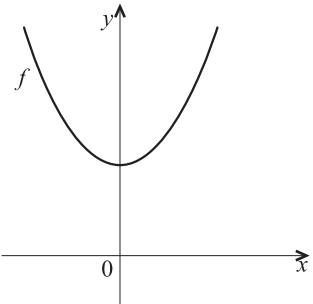
Нуле функције су оне вредности независно

променљиве  $x$ ,  $x \in D$  за које је вредност функције нула,

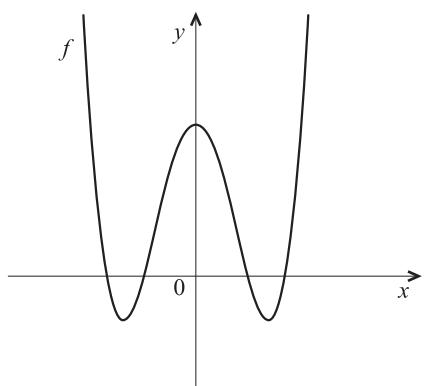
$f(x) = 0$  и представљају пресек графика функције са осом  $O_x$



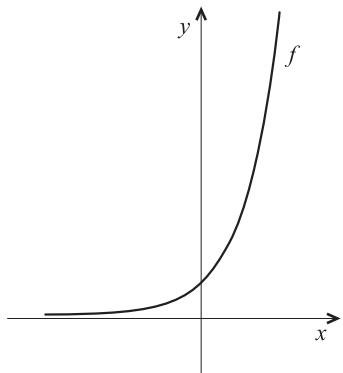
Функција је позитивна на скупу  $A \subseteq D$   
ако за све  $x \in A$  важи  $f(x) > 0$



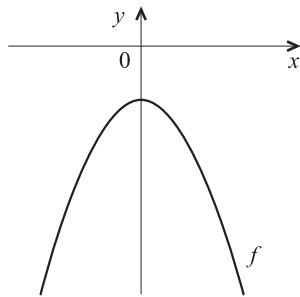
Функција је парна ако за свако  $x \in D$  важи  $-x \in D$  и  $f(-x) = f(x)$



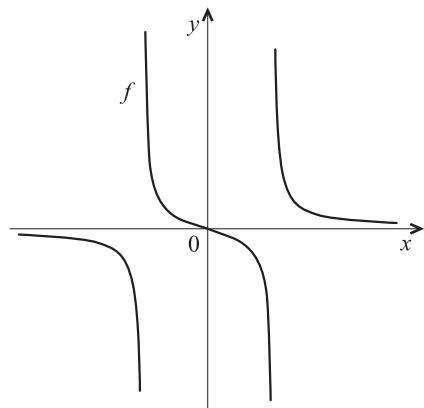
Функција  $f$  расте на скупу  $A \subseteq D$  ако за све  $x_1, x_2 \in A$  из  $x_1 < x_2$  следи  $f(x_1) < f(x_2)$



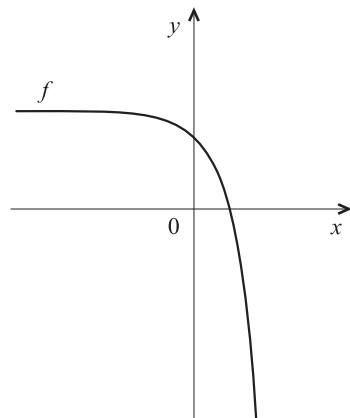
Функција је негативна на скупу  $A \subseteq D$   
ако за све  $x \in A$  важи  $f(x) < 0$



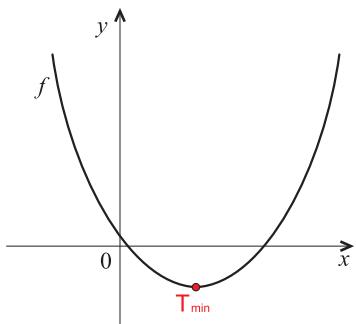
Функција је непарна ако за свако  $x \in D$  важи  $-x \in D$  и  $f(-x) = -f(x)$



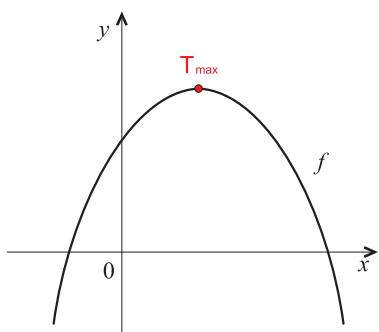
Функција  $f$  опада на скупу  $A \subseteq D$  ако за све  $x_1, x_2 \in A$  из  $x_1 < x_2$  следи  $f(x_1) > f(x_2)$



Реалан број  $a \in D$  је апсциса тачке минимума за  $f$  ако за све  $x \neq a$ ,  $x \in D$  важи  $f(x) > f(a)$ .  $f(a)$  је минимум функције  $f$ .



Реалан број  $a \in D$  је апсциса тачке максимума за  $f$  ако за све  $x \neq a$ ,  $x \in D$  важи  $f(x) < f(a)$ .  $f(a)$  је максимум функције  $f$



**Завршни део часа: 5 минута**

Ученици добијају задатак да понове градиво о линеарној функцији из првог разреда

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Функција  $y = x^n$  и њен график.

**Тип часа:** обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка и фломастери у боји као помоћно средство

**Циљ часа:** Усвајање особина реалних функција;

**Образовни задаци:** Научити ученике да цртају функције облика  $y = x^n$  и уочавају и дискутују њихове особине

**Васпитни задаци:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање уредности, прецизности и тачности. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Проширивање знања ученика о реалним функцијама, развијање способности ученика за синтезу, односно обједињавање делова у целину

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА1.3.3. Анализира графички представљене функције ( одређује нуле, знак, интервале монотоноти, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту)

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** функција, парност функције, график

**Ток првог часа:**

### Уводни део часа 5 минута:

Кратко понављање појма функције, графика функције и особина. Понављање појма линеарне функције.

### Главни део часа: 35 минута

$$y = x^n \quad n \in N, \quad x \in R$$

1) Функција облика  $y = x$      $n = 1$     линарна функција

x	0	1
y	0	1

Област дефинисаности:  $D = R$

Нула функције (пресек са  $O_x$ ):  $x = 0$

(координатни почетак)

График функције припада I и III квадранту

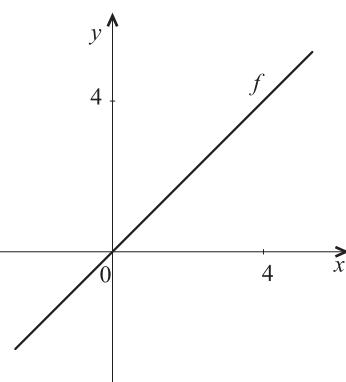


График је симетричан у односу на координатни почетак.

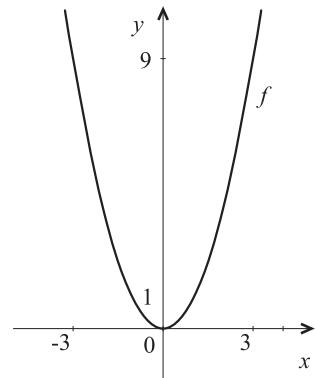
Функција је монотоно растућа за сваки реалан број

Знак функције:  $y < 0, \quad x \in (-\infty, 0) \quad y > 0, \quad x \in (0, +\infty)$

Кодомен:  $\overline{D} = R$

2) Функција облика  $y = x^2 \quad n = 2$

x	0	-1	1	-2	2	-3	3
y	0	1	1	4	4	9	9



Област дефинисаности:  $D = R$

Нула функције:  $x = 0$  (координатни почетак)

График функције припада I и II квадранту

График је симетричан у односу на  $y$  осу и парна

Функција је монотоно растућа за  $x \in (0, +\infty)$  и

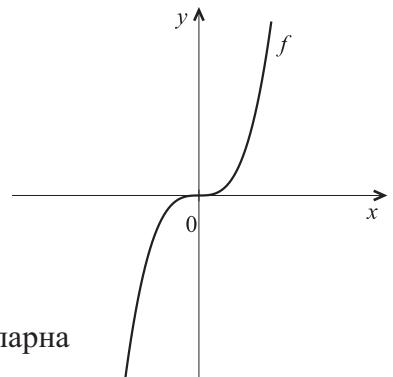
монотоно опадајућа за  $x \in (-\infty, 0)$

Знак функције:  $y \geq 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

Кодомен:  $\overline{D} = R^+$

3) Функција облика  $y = x^3 \quad n = 3$

x	0	-1	1	-2	2
y	0	-1	1	-8	8



Област дефинисаности:  $D = R$

Нула функције:  $x = 0$  (координатни почетак)

График функције припада I и III квадранту

График је симетричан у односу на координатни почетак и непарна

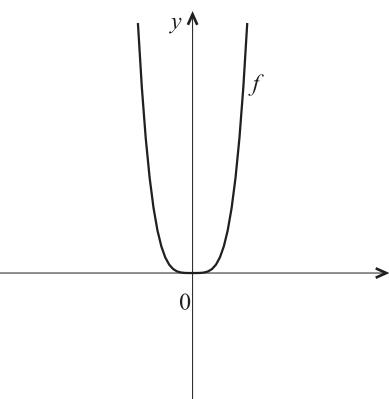
Функција је монотоно растућа за сваки реалан број

Знак функције:  $y < 0, \quad x \in (-\infty, 0) \quad y > 0, \quad x \in (0, +\infty)$

Кодомен:  $\overline{D} = R$

4) Функција облика  $y = x^4 \quad n = 4$

x	0	-1	1	-2	2
y	0	1	1	16	16



Област дефинисаности:  $D = R$

Нула функције:  $x = 0$  (координатни почетак)

График функције припада I и II квадранту

График је симетричан у односу на  $y$  осу и парна

Функција је монотоно растућа за  $x \in (0, +\infty)$  и

монотоно опадајућа за  $x \in (-\infty, 0)$

Знак функције:  $y \geq 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

Кодомен:  $\overline{D} = R^+$

**Завршни део часа: 5 минута**

Дискутовати разлике између функција облика  $y = x^n$  са парним и непарним изложиоцем степена.

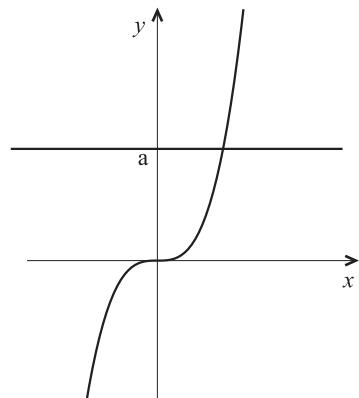
**Ток другог часа:****Уводни део часа: 5 минута**

Дискутовати разлике између функција облика  $y = x^n$  са парним и непарним изложиоцем степена.

**Главни део часа: 35 минута**

Посматраћемо једначину  $x^n = a$

Ако је  $n$  непаран природан број, онда се права  $y=a$  и график функције  $y = x^n$  секу у једној тачки



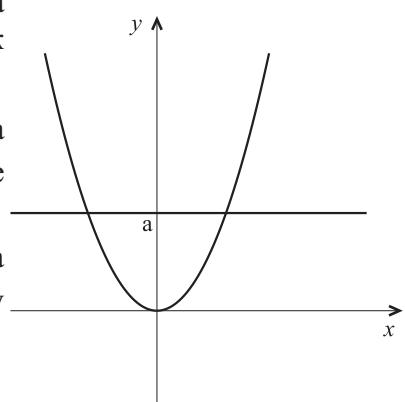
Зато за непарно  $n$  и произвољно  $a \in R$  једначина  $x^n = a$  има јединствено решење и то за  $a > 0$ , то решење је позитиван број, за  $a = 0$  решење је једнако нули, за  $a < 0$  решење је негативно.

**Пример 1.** Графички решити једначину  $x^3 = 8$ 

Ако је  $n$  паран природан број,  $a > 0$ , једначина  $x^n = a$  има два решења која су супротни бројеви, јер се права  $y=a$  и график функције  $y = x^n$  секу у две тачке симетричне у односу на  $y$  осу.

Ако је  $n$  паран природан број,  $a < 0$ , једначина  $x^n = a$  нема реална решења, јер се права  $y=a$  и график функције  $y = x^n$  не секу.

Ако је  $n$  паран природан број,  $a = 0$ , једначина  $x^n = a$  има једно решење, јер се права  $y=a$  и график функције  $y = x^n$  секу у једној тачки.

**Пример 2.** Графички решити једначину  $x^2 = 9$ **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак

1. Графички решити једначину  $x^3 = 27$
2. Графички решити једначину  $x^2 = 16$



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Дефиниција корена

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка и фломастери у боји као помоћно средство

**Циљ часа:** Усвајање операција са коренима

**Образовни задаци:** Ученик треба да зна дефиницију корена и услове под којима су дефинисане вредности ирационалних израза

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Уопштавање појма корена

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.2. Израчунава вредност израза користећи својства операција и функција

2.МА.1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** корен

### Уводни део часа 10 минута:

Подсећање на закључке у вези са графиком функције  $y = x^n$

Ненегативно решење једначине  $x^n = a$ ,  $n \in N$ ,  $a \in R^+ \cup \{0\}$  назива се  $n$ -ти корен из  $a$

**Дефиниција:** Нека сун  $n \in N$ ,  $a \in R$ . Симбол  $\sqrt[n]{a}$  означава

- $n$ -ти корен реалног броја  $a$  у случају када  $n \in N$ ,  $n = 2k - 1$ ,  $k \in N$ ,  $a \in R$
- позитиван  $n$ -ти корен броја  $a$  у случају  $n = 2k$ ,  $k \in N$ ,  $a > 0$

Посматрањем функције  $y = x^n$  закључујемо да је паран корен дефинисан само за ненегативне поткорене величине, а непаран корен је дефинисан за сваки реалан број:  
 $\sqrt[2n]{a} \quad a \geq 0$  и  $\sqrt[2n+1]{a} \quad a \in R$

"*Ознака (символ) за квадратни корен*  $\sqrt{\phantom{x}}$  *је први пут употребљена у 16. веку. Скоре је сигурно да је произшло из прилагођеног исписа малог латиничног слова r, што је скраћеница од лат. radix што значи корен".* ( из Википедије )

*Крајем 15. века француски математичар Шике и Италијан Лука Пачиоли примењују латинично слово r као ознаку за корен, а изложилац корена се означава на разне начине. Неки извори тврде да знак за корен није настао од ознаке r. У Немачкој се за ознаку квадратног корена употребљавала једна тачка испред броја, а две тачке за ознаку четвртог корена ( Дрезденска латинска алгебра 1480). После се на ову тачку*

*надовезује коса црта, и тако, сматрају настаје знак из кога се временом развио данашњи знак за корен. Данашњи симбол потиче од математичара из 16. Века А.Ризеа(1524.) и К. Рудолфа (1525.)( Извор от Уикипедия, Таблици на математички симболи)*

### Главни део часа: 30 минута

**Пример 1.** Одреди дужину странице квадрата чија је површина  $49 \text{ cm}^2$ .

**Пример 2.** Одреди дужину странице која је запремина  $216 \text{ cm}^3$ .

- Квадратни корен ненегативног реалног броја је број који треба степеновати са два да би се добила поткорена величина.  $\sqrt{a} = b$  ако  $a = b^2$   $a \geq 0$ .

**Пример 3.**  $\sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 81 = 9^2$

- $n$ -ти корен ненегативног реалног броја ( $n = 2k$ ,  $k \in N$ ), је број који треба степеновати са  $n$  да би се добила поткорена величина.  $\sqrt[n]{a} = b$  ако  $a = b^n$   $a \geq 0$ , при чему број  $a$  зовемо поткорена величина, а број  $n$  изложилац корена.

Дакле, за парно  $n$  важи  $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases}$

- $n$ -ти корен реалног броја ( $n = 2k - 1$ ,  $k \in N$ ) је број који треба степеновати са  $n$  да би се добила поткорена величина.  $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$ , при чему број  $a$  зовемо поткорена величина, а број  $n$  изложилац корена. Дакле, за непарно  $n$  важи  $\sqrt[n]{a^n} = a$

**Пример 4.**  $\sqrt[3]{27} = 3$ , јер је  $27 = 3^3$ ,  $\sqrt[4]{16} = 2$ , јер је  $16 = 2^4$ ,  
 $\sqrt[5]{-32} = -2$ , јер је  $-32 = (-2)^5$ ,  $\sqrt[4]{0} = 0$ , следи из  $0 = 0^n$

Објаснити зашто следећа реченица није тачна  
 $(-2)^2 = 4$  ако и само ако  $-2 = \sqrt{4}$ ?

### Задаци

1. Одредити вредности променљивих за које су корени дефинисани:

1)  $\sqrt{10x}$       2)  $\sqrt{-5x}$       3)  $\sqrt{4-x}$       4)  $\sqrt{-9x^2}$       5)  $\sqrt{25x^2}$       6)  $\sqrt{\frac{x-1}{2}}$

2. Израчунај: 1)  $\sqrt{(-5)^2}$  2)  $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$  3)  $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$  4)  $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$   
5)  $\sqrt{(3+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$

3. Израчунај:

1)  $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{(-2)^3} + 2 \cdot \sqrt{(-4)^2}}{\sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[5]{(-4)^5}}$

2)  $\frac{(\sqrt{2^4} + \sqrt[3]{4^3}) \cdot 2^{-1} + (-3)^2 - 1}{\sqrt{(-2)^2} - \sqrt[5]{(-2)^5}}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 22, 23.



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Операције са коренима

**Тип часа:** обрада, понављање и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка и фломастери у боји као помоћно средство

**Циљ часа:** Увођење рачунских операција са коренима на првом часу и увежбавање истих на другом часу

**Образовни задаци:** Ученик треба да научи коришћење особина корена за упрошћавање израза и да примени исте на упрошћавање израза са коренима

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Уопштавање појма корена

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.2. Израчунава вредност израза користећи својства операција и функција

2.МА.1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** корен

## Ток првог часа

### Уводни део часа 5 минута:

Контрола домаћег задатка.

Поновити дефиницију и област дефинисаности корена постављањем питања ученицима  
Израчунање корена зове се кореновање; изрази у којима се поред основних рачунских операција јављају и корени зову се ирационални изрази.

### Главни део часа: 35 минута

**ОПЕРАЦИЈЕ СА КОРЕНИМА:**  $n, m, p, k \in N$ ,

- Корене можемо сабирати и одузимати ако и само ако имају исте изложиоце корена и исте поткорене величине.

**Пример 1.**  $3\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{a^2} + 4\sqrt[3]{a^2}$

- Корене можемо множити и делити увек, али претходно их морамо проширити тако да имају исте изложиоце.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, a, b \geq 0, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0$$

**Пример 2.** а)  $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a}$       б)  $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt{a^3}$

- Корен степенујемо тако што му степенујемо поткорену величину.  
 $(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{(a^m)^p}$        $a \geq 0$

**Пример 3.**  $(\sqrt[3]{a^2})^2 = \sqrt[3]{a^4}$ ,       $(\sqrt[4]{2})^3 = \sqrt[4]{8}$

- Корен коренујемо тако што изложиоце корена помножимо, а поткорену величину препишемо.  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^x}} = \sqrt[n \cdot m]{a^x}$        $a \geq 0$

**Пример 4.**  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[6]{a^5}$ ,       $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \sqrt[24]{a}$

- Чинилац се уноси под корен тако што се прво степенује изложиоцем корена.  
 $a^x \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{(a^x)^n \cdot a^m}$ ,  $a \geq 0$ .

**Пример 5.** (збирка, 27.зад) е)  $b^3 \cdot \sqrt{b^4}$       ђ)  $2a \cdot \sqrt{\frac{x}{4a}}$       и)  $\frac{x+y}{a-b} \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{xy + y^2}}$

- Ако је изложилац поткорене величине већи од изложиоца корена онда један део те поткорене величине можемо изнети испред корена.

$$\sqrt[n]{a^n b} = a \cdot \sqrt[n]{b} \quad a, b \geq 0$$

**Пример 6.**  $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ ,       $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$ ,       $\sqrt{16x^5}$

Задаци за вежбање:

- (28. збирка): в)  $(0,5\sqrt{98} + 4\sqrt{18}) - \left(0,2\sqrt{50} + \frac{1}{3}\sqrt{72} - \sqrt{200}\right)$
- Израчунати: 1)  $\sqrt[4]{256} - (-5\sqrt[3]{4})^3$       2)  $(\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-8})^{200}$       3)  $(5 \cdot \sqrt[3]{-2})^3$
- Упореди: а)  $3\sqrt{5}$  и  $5\sqrt{3}$       б)  $0,5 \cdot \sqrt[3]{2}$  и  $0,2 \cdot \sqrt[3]{5}$
- (29. збирка): б)  $2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - \sqrt{50} + 3\sqrt{32}$       д)  $3\sqrt[3]{-54} - \sqrt[3]{-128} + \sqrt[3]{250}$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 24, 25, 26, 27 (примери који нису урађени на часу)

**Ток другог часа****Уводни део часа 10 минута:**

Анализа домаћег задатка и решавање задатака који ученицима нису били јасни.  
Поновити област дефинисаности корена.

**Главни део часа: 30 минута**

1. (31.б), збирка) Израчунати:  $\frac{2,4 \cdot \sqrt[2,4]{\frac{1}{3}} - 9\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{2\frac{1}{12}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{27}}{1\frac{1}{3}\sqrt[3]{4\frac{1}{2}} - \sqrt{0,5} + 1,5\sqrt{2} + 20\sqrt{\frac{1}{50}} - \sqrt{32}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. (34. збирка) Провери једнакости а)  $\sqrt{4 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$   
б)  $\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}} = 2$

3. Израчунати: а)  $\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^5} \cdot \sqrt{a^7} : \sqrt[4]{a^7} \cdot \sqrt[3]{a^5}$   
б)  $\left( \sqrt[7]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^5} \cdot \sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^7} \right) : \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^7}$ ,  
в)  $\left( (x\sqrt{x})^5 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \right) : \left( x^4 \cdot \sqrt[6]{x^5} \right)$ , коментарисати дефинисаност израза

4. Доказати: а)  $(2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 30, 31. а), 34. а, б), 38.



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Рационалисање имениоца разломка

**Тип часа:** понављање и утврђивање 1 час, вежбање 2 часа

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка и фломастери у боји као помоћно средство

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да понови и примени стечена знања о особинама корена

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Развијање свести ученика о потреби и значају повезивања градива и његове примене

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.2. Израчунања вредност израза користећи својства операција и функција

2.МА.1.1.2. Израчунања вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** рационалисање

## Ток првог часа

### Уводни део часа 5 минута:

Анализа домаћег задатка. Увод у тему и мотивациони разговор.

Ако при рачунању са коренима добијемо израз у облику разломка, при чему именилац тог разломка садржи корене, може се такав разломак трансформисати, тако да у имениоцу више нема корена. Наведени поступак називамо рационалисање.

### Главни део часа: 35 минута

Рационалисати именоце разломака:

$$1) \frac{9}{\sqrt{3}}$$

$$3) \frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}}$$

$$5) \frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a^3}}$$

$$2) \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$$

$$4) \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt[4]{125}}$$

$$6) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$7) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$$

$$9) \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$$

$$11) \frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$8) \frac{12}{\sqrt{32}-\sqrt{8}}$$

$$10) \frac{x\sqrt{a}-a\sqrt{x}}{x\sqrt{a}+a\sqrt{x}}$$

$$12) \frac{a+b}{2\sqrt{a-b}}$$

Решење:

$$1) \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$2) \frac{5}{\sqrt[4]{5}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{5} = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$$

$$4) \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt[4]{125}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt[4]{5^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{5^2} \cdot \sqrt[4]{5}}{2 \cdot \sqrt[4]{5^4}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{125}}{10}$$

$$5) \frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^2}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt[15]{a^5} \cdot \sqrt[15]{(a^2)^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt[15]{a^{11}}}{a} = a \cdot \sqrt[15]{a^{11}}$$

$$6) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$

$$10) \frac{x\sqrt{a}-a\sqrt{x}}{x\sqrt{a}+a\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{a}-a\sqrt{x}}{x\sqrt{a}+a\sqrt{x}} \cdot \frac{x\sqrt{a}-a\sqrt{x}}{x\sqrt{a}-a\sqrt{x}} = \frac{x^2a-2ax\sqrt{ax}+a^2x}{x^2a-a^2x}$$

11)

$$\begin{aligned} \frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{6}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\sqrt{2}} = \\ \frac{6 \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-\sqrt{4}} &= \frac{6 \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{6+2\sqrt{15}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3+\sqrt{15}} \cdot \frac{3-\sqrt{15}}{3-\sqrt{15}} = \\ \frac{3 \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (3-\sqrt{15})}{-6} &= -\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (3-\sqrt{15})}{2} \end{aligned}$$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 35, 36, 40

### Ток другог часа

#### Уводни део часа 5 минута:

Анализа домаћег задатка.

#### Главни део часа: 35 минута

1. Ослободити се ирационалности у имениоцима следећих разломака:

$$1) \frac{1}{(3-\sqrt{2})^2}$$

$$2) \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

2) Ослободити се ирационалности у имениоцима следећих разломака:

$$1) \frac{1}{(3-\sqrt{2})^3}$$

$$2) \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$3) (\text{збирка 46.a)}) \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{3}}$$

$$4) (\text{збирка 44. ђ})) \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}$$

Додатни задаци:

$$5) \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

$$7) \frac{a+3}{\sqrt[3]{a^2-9}}$$

$$10) \frac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$$

$$6) \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[8]{5}}$$

$$8) \frac{1}{3+\sqrt[3]{5}}$$

$$9) \frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 44 – задаци који нису рађени на часу.

### Ток трећег часа

#### Уводни део часа 5 минута:

Анализа домаћег задатка.

#### Главни део часа: 35 минута

$$1. (46.д), \text{збирка}): 2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$$

2. (54, збирка): Доказати да важе следеће једнакости:

$$\text{а)} (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}} = 2$$

$$\text{г)} \left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2 = 2\sqrt{61+24\sqrt{5}}$$

Додатни задаци:

3. (119, збирка): Рационалисати имениоце разломака:

$$\text{а)} \frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+2\sqrt{2}-2}$$

$$\text{б)} \frac{12}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5}}$$

4. (125, збирка): Дати су бројеви  $a = \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ ,  $b = \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ .

$$\text{Показати да је } ab = 2(\sqrt{5}-1), \quad a+b = \sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 45, 46

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци из области степеновања и кореновања

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увежбавање и рекапитулација стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да увежба стечена знања о особинама корена и степена

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Развијање свести ученика о потреби и значају повезивања градива и његове примене

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.2. Израчунава вредност израза користећи својства операција и функција

2.МА.1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, корен

**Ток: првог часа**

**Уводни део часа 5 минута:**

Анализа домаћег задатка.

**Главни део часа: 35 минута**

1. Израчунај вредност израза  $\sqrt{10 \cdot \left(2\frac{1}{3} + \sqrt{(-4)^2}\right)^{-1} + \frac{53}{3}} \cdot \left(\sqrt{4^{-3}} + \frac{5}{24}\right)$
2. Израчунати:  $\frac{(1,3)^0 + (0,2)^1}{\sqrt[3]{(-3)^3}} \cdot 16^{-2^{-2}} - \frac{\sqrt{(-8)^2}}{(-2)^3}$
3. Ако је  $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$  израчунати  $a + a^{-1}$

4. Ако је  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$  израчунати вредност израза:  $\frac{1+a}{1+\sqrt{1+a}} - \frac{1-a}{1-\sqrt{1-a}}$
5. Доказати једнакост:  $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$

Додатни задаци:

6. Израчунај вредност израза а)  $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$   
 б)  $\sqrt[3]{\sqrt{x} + \sqrt{8+x}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x} - \sqrt{8+x}}$   
 в)  $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$
7. Одреди вредност израза:  $\frac{2 - \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 50, 51

**Ток другог часа****Уводни део часа 5 минута:**

Анализа домаћег задатка.

**Главни део часа: 35 минута**

Час се реализује на начин да ученици следеће задатке раде на табли и самостално на месту:

1. Изврши назначене операције  $\left(\left(\frac{3a^2}{4b^{-3}}\right)^{-3} : \left(\frac{9a^{-2}b}{4}\right)^{-2}\right) \cdot \frac{b^7}{12a^{-11}}$
2. Изврши назначене операције  $x^6 \cdot \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} : \left(\sqrt[8]{x^3 \cdot \sqrt{x}} \cdot (x\sqrt{x})^3\right)$

3. Извршити назначене операције:

a)  $\left(\frac{a+a^{-1}-1}{a+a^{-2}} - \frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}+2}\right) : \frac{a^{-1}}{1+a^{-1}}$   
 б)  $\frac{a^{-4}-9b^{-2}}{a^{-2}-3b^{-1}} \cdot \frac{(b+3a^2)^{-1}}{a^{-2}b^{-1}}$

4. (Пријемни испит, ЕТФ 2012.)

Израчунај вредност израза:  $\left(\frac{(-0,4)^3}{(-0,8)^3} - \frac{(-0,8)^3}{(-0,4)^3}\right) : \left(\frac{3}{4} - 3\right)$

Додатни задаци:

5. (Пријемни испит, ЕТФ 2011.)

Ако је  $|x| > 2, x \in R$  упрости израз:  $\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}} + \frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$

6. (Пријемни испит, ЕТФ 2010.)

Ако је  $a > 0, x > \sqrt{a}$  упрости израз:  $\sqrt{\frac{a+x^2}{x} - 2\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{a+x^2}{x} + 2\sqrt{a}}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 65.а), 67.в)



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци из области степеновања и кореновања

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** рад у групи

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** наставни листићи, проектор, рачунар

**Циљ часа:** Увежбавање и рекапитулација стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да увежба стечена знања о особинама корена и степена

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика. Развијање солидарности, комуникације и критичности.

**Функционални задаци:** Развијање свести ученика о потреби и значају повезивања градива и његове примене

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.2. Израчунава вредност израза користећи својства операција и функција  
 2.МА.1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, делење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер  
 2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Ученицима дели унапред припремљене наставне листиће и у последњем делу часа путем презентације врши заједно са ученицима анализу задатака

**Активност ученика:** У оквиру групе раде задатке да би на крају часа учествовали у дискусији истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, корен

### Уводни део часа 5 минута:

Анализа домаћег задатка. Подела ученика у групе хетерогеног састава и подела наставних листића, ученици се поделе у групи које да ради који задатак.

### Главни део часа: 35 минута

Задаци се раде 25 минута:

$$1. \text{ (10. збирка) } \text{ д) } \frac{\left(m^2 - \frac{1}{n^2}\right)^m \left(n + \frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2 - \frac{1}{m^2}\right)^n \left(m + \frac{1}{n}\right)^{m-n}} \quad mn \neq 0, mn \neq \pm 1$$

$$2. \text{ Упрости израз } \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4ab}}{b^4 - a^4} \cdot \frac{b^3 - a^3}{(a^2 + b^2)^{-1}}, \text{ ако је } a+b > 0, a-b \neq 0$$

3. (67. a), збирка)  $\left( \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left( \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2, \quad a, b > 0, a \neq b$

4. (67. б), збирка)  $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1}{x + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \left( \frac{\sqrt{y}}{x - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy}} \right), \quad x, y > 0, x \neq y$

Анализа задатака траје око 10 минута

**Завршни део часа: 5 минута**

Ученици се подсећају да на следећем часу раде контролни задатак и наставник даје упутства ученицима на који начин да се припремају за исти.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Степен са рационалним изложиоцем

**Тип часа:** обрада новог градива

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање особина степена са изложиоцем који је рационалан број

**Образовни задаци:** Ученик треба да зна особине степена са рационалним експонентом

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Ученици треба да уоче да особине степена чији је изложилац рационалан број произилазе из одговарајућих особина кореновања и степеновања целим бројем

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.2. Израчунај вредност израза користећи својства операција и функција

2.МА.1.1.2. Израчунај вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, корен

### Уводни део часа 10 минута:

Дискусија контролног задатка и кратка анализа грешака.

Увод у тему и мотивациони разговор.

*Основне особине степеновања и основне особине кореновања указују на неке аналогије између ове две операције.*

### Главни део часа: 30 минута

**Дефиниција:**  $a \in R^+, \frac{m}{n} \in Q, m \in Z, n \in N$  
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ако важи  $a \in R^+, m, n \in Z, n, q \in N$  тада важи: Ако је  $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ , онда је  $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$ .

Докажимо.

Ако је  $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$  онда је  $mq = np$ , па важи  $a^{mq} = a^{np}$ , одакле следи  $(a^m)^q = (a^p)^n$ ,

даље је  $\left(\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right)^q = \left(\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right)^n$  односно  $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{nq} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{nq}$ , применом особина степена закључујемо  $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$

Основна правила степеновања рационалним бројем су иста као правила степеновања целим бројем.

**Пример 1.**  $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

**Пример 2.**  $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = (\sqrt[4]{3^4})^3 = 3^3 = 27$

**Пример 3.**  $0,25^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{(2^2)^3} = (\sqrt{2^2})^3 = 2^3 = 8$

Задаци за вежбање:

Израчунати:

1)  $4^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{1}{4}} - 32^{\frac{1}{5}}$       2)  $(0,125)^{-\frac{2}{3}}$       3)  $(0,008)^{\frac{2}{3}} - (0,064)^{\frac{2}{3}}$

4)  $\left(7\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(3\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$       5)  $32^{0,6} - 16^{0,75} + (1,44)^{0,5}$

6)  $3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{-0,25} \cdot 3^{\frac{4}{5}} \cdot 3 - 0,75$       7)  $0,5^{1,5} \cdot 0,25^{0,5} \cdot 8^{-1,5}$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 14, 15, 17

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Степен са рационалним изложиоцем - утврђивање градива

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да обнови и примени стечена знања из пређене наставне јединице

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Ученици треба да уоче да особине степена чији је изложилац рационалан број произилазе из одговарајућих особина кореновања и степеновања целим бројем

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.2. Израчунава вредност израза користећи својства операција и функција

2.МА.1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, рационални изложилац

### Уводни део часа 5 минута:

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

Задаци за вежбање

1. Израчунати:

a)  $9^{0,7} \cdot 3^{-0,4}$

б)  $36^{0,3} \cdot 6^{1,4} \cdot 216^{-\frac{1}{3}}$

в)  $(0,25)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,5} \cdot \sqrt[6]{4}$

г)  $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + 27^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{0,5} \cdot 3^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$$\text{д)} \left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0,2^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{\frac{1}{9}}\right)^{-3}$$

2. Одреди вредност израза  $\left(a^{\frac{1}{4}} - 6\right)^2 - 12a^{\frac{1}{4}}\left(a^{-\frac{1}{4}} - 1\right)$  ако је  $a=9$ .

3. Израчунати: 1)  $4^{-\frac{1}{4}} + \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(4^{-0,25} - \left(2 \cdot 2 \frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)$

2)  $2^0 \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-0,75} \cdot 3^{-\frac{1}{4}} + \sqrt[4]{216}$

3)  $\left(5^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right) \left(5^{\frac{2}{3}} - 15^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 62

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Степен са рационалним изложиоцем - вежбање

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да обнови и примени стечена знања из пређене наставне јединице

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Ученици треба да уоче да особине степена чији је изложилац рационалан број произилазе из одговарајућих особина кореновања и степеновања целим бројем

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.2. Израчунава вредност израза користећи својства операција и функција

2.МА.1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, рационални изложилац

## Ток првог часа

### Уводни део часа 5 минута:

Анализа домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

Задаци за вежбање:

1. Упореди изразе:

$$1) \sqrt[6]{8} \text{ и } \sqrt{3}$$

$$4) 9^{\frac{1}{2}} \text{ и } 25^{\frac{1}{3}}$$

$$2) \sqrt[3]{5} \text{ и } \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{3}}$$

$$3) \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{2}} \text{ и } \sqrt[3]{7}$$

2. Израчунај вредност израза

- 1)  $\left( \left( \left( \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}$
- 2)  $16^{\frac{1}{8}} + \left( 27^{-\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( 2^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{1}{9} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)$
- 3)  $2^{-1} \cdot \left( \frac{1}{9} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( \sqrt{(-7)^2} + 18 \frac{2}{5} + 10,6 \right) : 8^{\frac{1}{3}}$
- 4)  $\left( \frac{4}{5} : \left( 1 - \frac{4}{9} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^{-1} \cdot \left( \sqrt{\left( 1 - \frac{11}{5} \right)^2} - \sqrt[3]{(-1)^3} \right)$
- 5)  $16^{\frac{1}{8}} + \left( 27^{-\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( 2^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{1}{9} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 61

**Ток другог часа****Уводни део часа 5 минута:**

Контрола домаћег задатка.

**Главни део часа: 35 минута**

Задаци за вежбање: Упростити изразе:

- 1)  $\left( x^{\frac{9}{2}} \cdot y^{\frac{5}{4}} \right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left( x^{\frac{8}{15}} \cdot y^{-\frac{1}{3}} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad x, y > 0$
- 2)  $\left( \frac{27a^{\frac{1}{2}}}{b^{0,2}} \right)^{2,5} \cdot \frac{b^{\frac{1}{12}}}{3\sqrt[4]{3} \cdot a^{\frac{1}{24}}} \quad a, b > 0$
- 3)  $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} + \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} \quad a, b > 0, a \neq b$
- 4)  $\frac{a^{0,5}+1}{a+a^{0,5}+1} : \frac{1}{a^{1,5}-1} \quad a > 0, a \neq 1$
- 5)  $\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1} \quad a > 0, a \neq 1$
- 6)  $\frac{a+a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}+1} : \left( a^{\frac{3}{2}}-1 \right) \quad a > 0, a \neq 1$

7) (64.д), збирка) Израчунати вредност израза  $\left(a+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$  ако је  $x=4(a-1)$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 63, 64

### Ток трећег часа

#### Уводни део часа 5 минута:

Контрола домаћег задатка.

#### Главни део часа: 35 минута

1. (65. збирка): Упрости изразе:

$$б) \left[ \left( \sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{q} \right)^{-1} + \left( \sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{q} \right)^{-1} \right] : \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{p - q}, \quad p \neq q$$

$$г) \frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}}} \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1, \quad x > 0$$

2. (68. збирка): Упрости изразе:

$$б) \frac{p^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p} + \sqrt{q} - \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}}} - \frac{p^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p} - \sqrt{q} + \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}}}, \quad p, q > 0, p \neq q$$

$$в) \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} + \left( \frac{a\sqrt{a} + x\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \sqrt{ax} \right) : (a - x), \quad a > 0, x > 0, a \neq x$$

$$г) \frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} + \frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}, \quad a \neq -b$$

$$д) \left( 1 + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < a < b$$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 65.а, в), 66



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да обнови и примени стечена знања из пређене наставне јединице

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Ученици треба да уоче да особине степена чији је изложилац рационалан број произилазе из одговарајућих особина кореновања и степеновања целим бројем

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.2. Израчунава вредност израза користећи својства операција и функција

2.МА.1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, рационални изложилац

### Уводни део часа 5 минута:

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

- (Пријемни испит, ФОН 2014.)

Израчунај вредност израза: 
$$\left[ 4^{-1} \cdot \left( \frac{1}{25} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left( \sqrt{(-2)^2} - 1,8 \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sqrt[3]{(-1)^3} + 2,2 \right)$$

- (Пријемни испит, ФОН 2014.)

Упрости израз 
$$\left( \frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{b}}} - \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a^3+\sqrt{b^3}}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b} \right) \cdot (a+b+2\sqrt{ab}), \quad a,b > 0, a \neq b$$

3. Ако је  $A = \frac{4^{-2} - 3^{-4}}{0,5 - 3^{-1}} \cdot (0,5 + 3^{-1})^{-1} - 3^{-1} \cdot 81^{-\frac{1}{4}}$  одреди  $\sqrt{A^{-1}}$

4.  $\left( \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}} \right) \cdot (x - 3 - 2x^{-1}) - \left( \frac{2x-3}{x+5} \right)^0 \quad x > 0, x \neq -5$

5. Израчунати вредност израза за дату вредност  $x$ :

a)  $\frac{(1-x)(x+2)}{x^2(x+1)^2}, \quad x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$       б)  $x^3 + 3x, \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

6. Упроостити израз  $\left( \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} - 1+x} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x} \right), \quad x \in (0,1)$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 69. а,б)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** рад у групи

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** наставни листићи, проектор, рачунар

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да примени стечена знања из пређене наставне јединице

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Изграђивање код ученика свести о потреби и значају повезивања градива и његове примене

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.2. Израчунава вредност израза користећи својства операција и функција

2.МА.1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Подела наставних листића, анализа исхода рада у групи

**Активност ученика:** Рад у групи

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе,

аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** степен, рационални изложилац

### Уводни део часа 5 минута:

Контрола домаћег задатка. Подела наставних листића за рад по групама. Наставник има унапред припремљен план поделе на групе.

### Главни део часа: 30 минута

Рад у групи траје око 30 минута

1. Ако је  $a + a^{-1} = 3$  израчунај  $a^3 + a^{-3}$
2. Упрости израз  $\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}$
3. Упрости израз  $\left( \frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} - \frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} \right) \cdot 2 \cdot (xy)^{-\frac{1}{3}}, \quad x, y > 0$
4. Израчунати  $\left( 2^{-1} \cdot \left( \sqrt{(-7)^2} + 18 \frac{2}{5} + 10,6 \right) : 8^{\frac{1}{3}} \cdot \left( \frac{1}{9} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}$
5. Израчунати:  $x^3 + 3x - 14$  ако је  $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$

**Завршни део часа: 10 минута**

Ученицима се на крају часа пушта презентација са урађеним примерима и врши се корекција грешака.

Домаћи задатак из збирке: 69. в, г)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Имагинарна јединица. Појам комплексног броја. Степен имагинарне јединице

**Тип часа:** обрада новог градива

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увођење имагинарне јединице и појма комплексног броја

**Образовни задатак:** Научити ученике особине имагинарне јединице, појам комплексног броја и степеновање имагинарне јединице

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** увежбавање рачунских операција са комплексним бројевима

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.2. Разуме појам комплексног броја, представља га у равни и зна основне операције са комплексним бројевима.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** имагинарна јединица, комплексни број

### Уводни део часа 10 минута

Квадрат сваког реалног броја је ненегативан број. Због тога, на пример, једначина  $x^2 + 1 = 0$  нема решења у скупу реалних бројева. Претпоставимо да постоји број, у ознаки  $i$ , такав да је  $i^2 = -1$ . Са наведеним бројем може да се рачуна применом алгебарских закона. Ако посматрамо израз облика  $a + bi$  онда са њиме изводимо операције као са полиномима. Број  $i$  називамо имагинарна јединица.

*Имагинарне бројеве је дефинисао италијански математичар Рафаел Бомбели 1572. године. У то време сматрани су бесмисленим, нимало корисним и били одбацивани, као нула својевремено. Њихово уздизање десило се у тренутку када се појавила потреба за дефинисањем квадратног корена из негативног броја, јер до тада није постојао ниједан реалан број који би решио тај проблем. Бомбели је тада увео нови број – имагинарну јединицу. (извор: <http://elementarium.cpn.rs/>)*

### Главни део часа: 30 минута

Дефиниција: Скуп  $C = \{a \pm bi \mid a, b \in R\}$  где је  $i$  број који има својство  $i^2 = -1$  се зове скуп комплексних бројева.

Ако је  $b = 0$ , комплексни број  $a + bi$  постаје реалан број  $a$ , па можемо рећи да је скуп реалних бројева  $\mathbf{R}$  подскуп скупа  $\mathbf{C}$ .

Ако је  $a = 0$ , комплексни број  $a + bi$  постаје имагинарни број  $bi$ .

Закључујемо да је комплексни број изражен као збир реалног и имагинарног броја.

Ако је  $z = a + bi$ , онда имамо следеће ознаке:

$a$  је **реални део** комплексног броја  $z$  и пише се  $a = \operatorname{Re}(z)$

$b$  је **имагинарни део** комплексног броја  $z$  и пише се  $b = \operatorname{Im}(z)$ ,  $z = \operatorname{Re}z + i \operatorname{Im}z$

$$\text{Пример 1. } \operatorname{Re}(3+2i) = 3 \quad \operatorname{Re}(4) = 4 \quad \operatorname{Re}(5i) = 0 \quad \operatorname{Re}(5-2i) = 5$$

$$\operatorname{Re}(4i-2) = -2$$

$$\operatorname{Im}(3+2i) = 2 \quad \operatorname{Im}(4) = 0 \quad \operatorname{Im}(5i) = 5 \quad \operatorname{Im}(5-2i) = -2$$

$$\operatorname{Im}(4i-2) = 4$$

Ако је  $x$  било који број такав да је  $x^2 = -1$ , користећи дефиницију броја  $i$  можемо писати  $x^2 = i^2$  односно:  $x^2 - i^2 = 0$  што је еквивалентно са  $(x-i)(x+i) = 0$ . Решења претходне једначине су  $x = i$  или  $x = -i$ . Дакле, доказали смо да постоје тачно два броја  $x$  са особином да је  $x^2 = -1$ .

$$i^0 = 1 \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^1 = i \quad i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^2 = -1 \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i \quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

Степеновање имагинарне јединице  $i^{4k+p} = i^p$ , где су  $k$  и  $p$  цели бројеви

1. Израчунати

a)  $i^{2015}$       б)  $i^{2016}$

в)  $5i^{37} + i^2 - 8i^5 + 6i - 2i^{26} + i^{17}$       г)  $7i^{-120} + 9i^{58} + 24i^{-42} - 16i^{35}$

2. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја      1)  $(1+i)^2$       2)  $(1+i)^3$   
3)  $(1+i)^4$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 70

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Операције сабирања, одузимања и множења комплексних бројева  
**Тип часа:** комбиновани: обрада новог градива и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Научити појам једнакости, операције сабирања, одузимања и множења комплексних бројева

**Образовни задатак:** Научити ученике да сабирају, одузимају и множе комплексне бројеве

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** увежбавање рачунских операција са комплексним бројевима

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.2. Разуме појам комплексног броја, представља га у равни и зна основне операције са комплексним бројевима.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** комплексни број

### Уводни део часа 10 минута

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

#### Једнакост у скупу C

Комплексни број  $z = a + bi$  је једнак нули ако и само ако су његов реални и његов имагинарни део једнаки нули, односно  $a=0$  и  $b=0$ .

Два комплексна броја  $z = a + bi$  и  $w = c + di$  су једнака ако су им једнаки реални и имагинарни делови односно важи  $a = c \wedge b = d$ .

$$a + bi = c + di \quad \text{акко} \quad (a - c) + (b - d)i = 0$$

$$\text{акко} \quad a - c = 0 \wedge b - d = 0$$

$$\text{акко} \quad a = c \wedge b = d$$

### Операције сабирања одузимања и множења са комплексним бројевима

Нека је  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$

$$\begin{aligned}z + w &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\z - w &= (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \\z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Лако се провери да су овако дефинисани сабирање и множење комутативни, односно да важи:

$$z + w = w + z, \quad z \cdot w = w \cdot z$$

асоцијативни, односно

$$(z+w)+u = z+(w+u), \quad (z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u)$$

и да је множење комплексних бројева дистрибутивно у односу на сабирање

$$(z+w) \cdot u = z \cdot u + w \cdot u$$

- За које вредности бројева  $m$  и  $n$  су једнаки комплексни бројеви  $z = 15 + (m - 3)i$  и  $w = 5n + 8i$
  - (81. збирка): Наћи реалне бројеве  $x$  и  $y$  такве да је  
a)  $(1 + 6i)x - (2 - 3i)y = 9i - x$        $(4 + 3i)x - (2 - i)y - 10i = 0$
  - Нека је  $z = -5 + 9i$  и  $w = 6 - 4i$ . Израчунати    a)  $z+w$       б)  $z-w$       в)  $zw$       г)  $2z-3w$   
д)  $w^2$
  - Израчунати:  
а)  $(5 - 2i) + (2 + 8i)$       б)  $3 \cdot (5 - 2i) - (4 - 2i)$       в)  $(3 - 2i) \cdot (2 + 5i)$   
г)  $(1 + 2i)^3$       д)  $(1 - i)^{20}$       ђ)  $(1 - i\sqrt{3})^3$

### **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 72, 73, 80

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Дељење комплексних бројева

**Тип часа:** обрада новог градива

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Научити операције дељења комплексних бројева и појам коњуговано-комплексног броја

**Образовни задатак:** Научити ученике да деле комплексне бројеве

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** увежбавање рачунских операција са комплексним бројевима

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.2. Разуме појам комплексног броја, представља га у равни и зна основне операције са комплексним бројевима.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** комплексни број

### Уводни део часа 5 минута

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

Сваки од нуле различит комплексни број има себи реципрочан, тј. ако је

$$z = a + bi \neq 0 \text{ онда постоји } \frac{1}{z} = z^{-1} \text{ и при томе је } \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

Нека је  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  и  $w \neq 0$  тада је

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

1. Израчунај а)  $\frac{1-2i}{2+3i}$       б)  $\frac{1}{(1+i)^6}$       в)  $\left(\frac{1+i}{2-2i}\right)^3$

2. Одреди реални и имагинарни део комплексног броја:

а)  $z = \frac{2+i}{(3-i)^2}$       б)  $z = \frac{2}{1-2i} + \frac{5}{1+2i}$

$$\text{в)} z = \frac{-6 - 2i}{(1-i)^3} \quad \text{г)} z = \left( \frac{i-1}{i+1} \right)^3$$

$$3. \text{ Ако је } i \text{ имагинарна јединица, израчунај: } \frac{i^{2016} + i^{2017}}{i^{2015} - i^{2014}}$$

Број  $\bar{z} = a - bi$  се зове **коњуговано-комплексни** број броју  $z$

Такође важи:

$$z = 0 \iff \bar{z} = 0$$

$$z = w \iff \bar{z} = \bar{w}$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$z = \bar{z} \iff z \in R$$

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$z \cdot \bar{z} \in R \quad \wedge \quad z \cdot \bar{z} \geq 0$$

$$4. \text{ Ако је } z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + i \text{ израчунати } z_1 - 2\bar{z}_2, \bar{z}_1(z_2 - i), \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}, z_1 \cdot \bar{z}_1$$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 71, 74

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци

**Тип часа:** понављање и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увежбање рада са изразима који садрже комплексне бројеве.

Проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Научити ученике да примењују операције са комплексним бројевима за упрошћавање израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Изграђивање код ученика свести о потреби и значају повезивања градива и његове примене

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.2. Разуме појам комплексног броја, представља га у равни и зна основне операције са комплексним бројевима.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** комплексни број

### Уводни део часа 5 минута

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

- Одрedi tako  $n \in N$  da je  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$

2. (86. збирка): Израчунати

$$\text{б) } z = \frac{(1+i)^8 + (i-1)^8}{(1+i)^6 - (1-i)^6} \quad \text{г) } z = \frac{(1+i\sqrt{7})^4 + (1-i\sqrt{7})^4}{(-1+i\sqrt{3})^4 + (-1-i\sqrt{3})^4}$$

3. (87. збирка): Израчунати

$$\text{б) } \left(\frac{4}{i\sqrt{3}-1}\right)^{12} \quad \text{в) } \frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$$

4. Израчунати  $(1+i)^{2015}$

5. (97. збирка): Одредити реалне вредности  $x$  и  $y$  за које су комплексни бројеви  $z_1 = y^2 - 7y + 9xi$  и  $z_2 = -12 + 20i + x^2i$  једнаки.
6. (98. збирка): Одредити реалне вредности  $x$  и  $y$  за које су комплексни бројеви  $z_1 = 8x^2 - 20i^9$  и  $z_2 = 9x^2 - 4 + 10yi^3$  коњуговано-комплексни.

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 86, 87 задатак, остали примери

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Модул комплексних бројева

**Тип часа:** комбиновани: обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Утврђивање операција са комплексним бројевима и увођење појма модула комплексног броја

**Образовни задатак:** Научити појам модула комплексног броја и његове особине

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** увежбавање рачунских операција са комплексним бројевима

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.2. Разуме појам комплексног броја, представља га у равни и зна основне операције са комплексним бројевима.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** модуло

### Уводни део часа 10 минута

Контрола домаћег задатка.

Одреди реални и имагинарни део комплексног броја:  $\frac{2(i-1)^{200} + (i+1)^{400} + 1}{(2i)^{100} + 1}$

### Главни део часа: 30 минута

Модул комплексног броја је реалан број  $|z| = |a + bi| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,    зnamо и  $z \cdot \bar{z} \geq 0$

Такође важи

$$|z| = 0 \text{ ако } z = 0 \quad |z| = |\bar{z}|$$

$$|zw| = |z||w| \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad w \neq 0$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Модул комплексног броја се назива и апсолутна вредност комплексног броја.

1. Одреди модул следећих комплексних бројева:

a)  $z = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i$       б)  $z = \frac{(\sqrt{3} + 2i)^2}{8}$

$$\text{в)} \quad z = \left( \frac{1-i}{1+i} \right)^5 \quad \text{г)} \quad z = \frac{(1+i)^{2016}}{i^{2017} + 2}$$

2. (Пријемни испит, ФОН 2013.) Ако за комплексни број  $z$  важи  $|z - 3| = |z - 3 + 2i|$  и  $|z - 2i| = |z + 4 - 2i|$  израчунати  $|z|$
3. (Пријемни испит, ФОН 2014.) Ако за комплексни број  $z$  важи  $\frac{|z - 1 + i|}{|z - 2 + 2i|} = 1$  и  $\frac{|z|}{|z - 1 - i|} = 1$  израчунати  $\operatorname{Im}(i \cdot \bar{z})$
4. (100. збирка) Одредити све комплексне бројеве  $z$  за које је  
 в)  $|z|^2 + z = 0$       г)  $z^2 + |\bar{z}| = 0$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 88, 89, 100. д, ђ)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комплексна раван

**Тип часа:** комбиновани: обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Геометријска интерпретација комплексних бројева

**Образовни задатак:** Научити приказ комплексног броја у правоуглом координатном систему и његово геометријско тумачење

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** јачање компетенција за геометријски приказ бројева

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.2. Разуме појам комплексног броја, представља га у равни и зна основне операције са комплексним бројевима.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** Гаусова раван

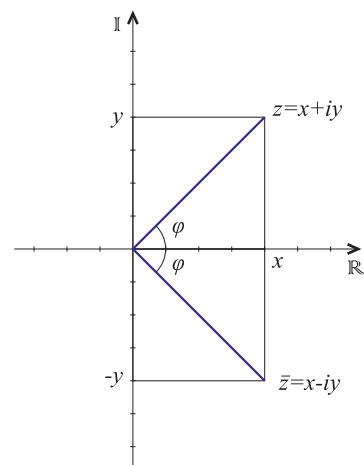
### Уводни део часа 5 минута

Анализа домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

Сваки комплексан број је потпуно задат са два реална броја, и при томе је важно који је први (реални део) и други (имагинарни део). Обрнуто, сваком уређеном пару реалних бројева  $(x,y)$  можемо придржити комплексни број  $z = x + yi$ . На наведени начин имамо обострано једнозначно пресликавање скупа  $C$  и скупа  $R^2$ . Наведена тврђња не значи да су  $C$  и  $R^2$  једнаки скупови.

Елементе из  $R^2$  можемо цртати као тачке у равни. Обострано једнозначно придрживање  $C$  и  $R^2$  омогућава да се и комплексни бројеви цртају у равни као тачке. Разлика између равни у којој се цртају уређени парови реалних бројева и равни у којој се цртају комплексни бројеви је у томе што у овој другој тачке можемо сабирати и множити, па зато ова друга има посебно име. Она се зове Гаусова раван или комплексна раван.



Тачка одређена са  $\bar{z} = x - yi$  је симетрична тачки одређеној са  $z = x + yi$  у односу на  $x$ -осу. Број  $|z|$  представља растојање комплексног броја  $z$  од координатног почетка.

1. Представи у бројевној равни следеће комплексне бројеве:  
а)  $z = 2$       б)  $z = i$       в)  $z = 5-3i$       г)  $z = -4+5i$       д)  $z = -6-3i$
2. Ако је  $z_1 = 2 - 5i$ ,  $z_2 = -2 - 8i$  нацртај  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_1 - z_2$ . Објаснити геометријски смисао величине  $|z_1 - z_2|$
3. Одреди скуп тачака у комплексној равни који задовољава следећи услов:  
а)  $\operatorname{Re}(z) > 0$       б)  $\operatorname{Im}(z) > 0$       в)  $-2 < \operatorname{Re}(z) < 2$       г)  $\operatorname{Im}(z) > -3$
4. Збирка 99. задатак  
б) Дати су комплексни бројеви  $z_1 = 3 + 2i$ ,  $z_2 = 2 + i$ . Одреди комплексан број  $z = x + iy$ , ако је  $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_2}\right) = \frac{3}{5}$ ,  $\operatorname{Im}(z\bar{z}_1) = -1$ .

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 99.a), 105

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Ученик треба да обнови и примени стечена знања из пређене наставне јединице

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Изграђивање код ученика свести о потреби и значају повезивања градива и његове примене

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.2. Разуме појам комплексног броја, представља га у равни и зна основне операције са комплексним бројевима.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** комплексни број

### Ток првог часа

#### Уводни део часа 5 минута

Контрола домаћег задатка.

#### Главни део часа: 35 минута

1. Нека је  $z = 2 - 3i$ . Израчунај вредност израза

$$\text{a)} \frac{\overline{z^2}}{2i^{12} + \overline{z^2}} - \frac{|z|}{z - 2i} \quad \text{b)} \left( \overline{\frac{z + i^{120}}{z^2 + i^{56}}} \right)$$

2. Одреди реалне бројеве  $x$  и  $y$  ако је  $\frac{x-2}{1-i} + \frac{y-3}{1+i} = 1 - 3i$

3. Израчунај број  $z$  из услова

$$\text{a)} (3+i)z + 2z - 5 = 9 + 8i$$

$$\text{б)} \frac{z}{4-2i} = 5 - 4i$$

$$\text{в)} |z+1| + z + i = 0$$

4. Наћи све комплексне бројеве  $z$  који су коњуговани свом квадрату ( $\bar{z} = z^2$  ).
5. Одреди комплексни број  $z$  ако је  $\operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , а  $|z| = \sqrt{3}$ .

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 90, 106.

**Ток другог часа****Уводни део часа 5 минута**

Контрола домаћег задатка.

**Главни део часа: 35 минута**

1. Ако је  $z + \frac{1}{z} = 1$  израчунај  $z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}}$ .

Решење

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= 1 && / \cdot z \\ z^2 - z &= -1 && / \cdot z \\ z^3 &= z^2 - z && \text{следи} && z^3 = -1 \\ z^{2016} &= (z^3)^{672} = (-1)^{672} = 1 \\ z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}} &= 2 \end{aligned}$$

2. Доказати  $z + \frac{1}{\bar{z}} - \left( \frac{\overline{1+z}}{z} \right) = z - 1$

3. (Пријемни испит, МатФ, 2008.)

Одреди вредност реалног броја  $a$  тако да важи

$$\frac{1+2ai}{1-ai} = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

4. (137. збирка)

Одреди све комплексне бројеве  $z = a + bi$ , тако да је

в)  $z^2 = 5 + 12i$

5. (Пријемни испит, ЕТФ 2008.)

Дати су комплексни бројеви  $z_1 = k + 1 + i(k - 1)$  и  $z_2 = 2k - ik$ . Одреди вредност реалног броја  $k$  тако да количник  $\frac{z_1}{z_2}$  буде реалан број.

6. (144. збирка) Одреди  $\operatorname{Re}(z)$  и  $\operatorname{Im}(z)$  комплексног броја  $z = \left( \frac{i-1}{i+1} \right)^n$ ,  $n \in N$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 137. а, б, г, д)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Припрема за први писмени задатак

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Ученик треба да обнови и примени стечена знања из пређене наставне јединице

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Изграђивање код ученика свести о потреби и значају повезивања градива и његове примене

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА1.1.1. Користи природне, целе, рационалне и реалне бројеве, различите записи тих бројева и преводи их из једног записа у други

2.МА.1.1.2. Израчунава вредност бројевног израза у коме се појављују сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање и при томе по потреби користи калкулатор или одговарајући софтвер

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** комплексни број

### Уводни део часа 5 минута

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

$$1. \text{ Упростити израз: } \frac{5^{-1} + (0,4)^0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}}{(2,5)^{-2} - (-2)^{-3} + \left(\frac{200}{103}\right)^{-1}} + \sqrt{(-1)^2}$$

$$2. \text{ Упростити израз: } \frac{2 \cdot 2^{-x} + 2}{1 - 2^{-2x}} + \frac{2^{-x} + 1}{2^{-2x} - 2^{-x}}$$

$$3. \text{ Израчунати: } \left( \sqrt[3]{x^{-2} \cdot \sqrt[5]{x}} \cdot \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^{-3}}} \cdot \sqrt[10]{\frac{1}{x}} \right)^2$$

4. Доказати да је  $A=B$ , ако је:

$$A = \frac{x-a}{a} \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{x}{a}-1\right)^{-4}}$$

$$B = \frac{x^2 - a^2}{a} \cdot \sqrt[5]{\frac{a^4}{(x+a)^5(x-a)^4}}$$

5. Рационалиши именилац разломка: а)  $\frac{12}{\sqrt{7-2\sqrt{6}}+1}$

б)  $\frac{8}{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$

6. Упрости израз:  $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} + \left( \frac{a\sqrt{a}+x\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} - \sqrt{ax} \right) : (a-x)$

7. Израчунај модуо комплексног броја:

а)  $z = (1-i)^{11} + 2^5 \cdot i^{2013}$  б)  $w = \frac{3-2i}{3+2i}$

### Завршни део часа: 5 минута

Подсетити ученике на који начин да се припреме за писмени задатак

## **2. Квадратна једначина и квадратна функција**

*Препоручени садржаји програма:*

*Квадратна једначина са једном непознатом и њено решавање, дискриминанта и природа решења квадратне једначине.*

*Вијетове формуле. Растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце; примене.*

*Неке једначине које се своде на квадратне.*

*Квадратна функција (нуле, знак, рашчење и опадање, екстремна вредност, график).*

*Квадратне неједначине.*

*Системи једначина са две непознате који садрже квадратну једначину (квадратна и линеарна, две чисто квадратне, хомогена квадратна и линеарна) - са графичком интерпретацијом.*

*Ирационалне једначине и неједначине.*

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Појам и решавање непотпуних квадратних једначина

**Тип часа:** обрада, утврђивање

**Облици рада:** фронтални, индивидуални

**Методе рада:** предавање, објашњавање, дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка, интернет ([www.matematiranje.com](http://www.matematiranje.com))

**Циљ часа:** Усвајање поступка решавања непотпуне квадратне једначине

**Образовни задатак:** оспособљавање ученика да решавају непотпуне квадратне једначине.

**Васпитни задатак:** развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности и прегледног записивања задатка.

**Функционални задатак:** развијање способности за посматрање, опажање, креативно и апстрактно мишљење, развијање перцепције, логичког мишљења и расуђивања.

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** непотпуна квадратна једначина

### Ток првог часа:

#### Уводни део часа: 10 минута

Увод у тему и мотивациони разговор из области историје математике:

*Квадратне једначине су решаване још у старом веку. У једном египатском папирусу је пронађен следећи задатак: "Наћи димензије поља облика правоугаоника, ако је његова површина 12, а ширина једнака три четвртине дужине." У том папирусу је наведен и одговор: "Дужина поља је 4." Још сложеније задатке решавали су древни Вавилонци: "Површина A, која се састоји од два квадрата, износи 1000. Страница једног квадрата је две трећине странице другог умањене за 10." Одговор се наводи кроз набрајање етапа у рачуну. Рецепти за решавање квадратних једначина се наводе и код Диофанта у "Аритметици", али томови који решавају потпуне квадратне једначине нису сачувани до данас. Занимљиво је да су у Индији у петом веку наше ере организовали јавна такмичења у решавању квадратних једначина. Прву систематичну књигу која излаже начине решавања квадратних једначина написао је багдадски научник Ал Хорезми у 9. веку. Кроз радове западноевропских научника Фиbonачија (1202.год.), Виета (1540-1603.), Жирара (1595-1632.), Декарта и Њутна дошло се до формула у оном облику како се и данас уче у школи.*

#### Главни део часа: 30 минута

**Дефиниција:** Квадратна једначина је полиномна једначина другог степена облика:  $ax^2 + bx + c = 0$  где је  $a \neq 0$  и  $a, b, c \in R$  или  $a, b, c \in C$ . Слова  $a$ ,  $b$ ,  $c$  се називају коефицијентима: квадратни коефицијент  $a$  је коефицијент уз  $x^2$ , линеарни коефицијент  $b$  је коефицијент уз  $x$ , а  $c$  је константни коефицијент.

**Дефиниција:** Квадратна једначина је непотпуна ако је  $b=0$  или  $c=0$

Примери непотпуних квадратних једначина:

$$1) x^2 = 0 \quad 2) 36x^2 = 25 \quad 3) \frac{3}{8}x^2 = 0$$

Извести заједно са ученицима закључак како се решавају у општем случају:

$ax^2 = 0$ ,  $a \neq 0$  еквивалентно је са  $x = 0$ . Дакле, једино решење једначине

$$ax^2 = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{је } x_1 = 0$$

$$4) 4x^2 - 1,69 = 0 \quad 5) x^2 + 1\frac{7}{9} = 0 \quad 6) 9x^2 = 4$$

Извести заједно са ученицима закључак како се решавају у општем случају:  
 $ax^2 + c = 0$ ,  $c \neq 0$ . Пошто је  $a \neq 0$  наведена једначина еквивалентна је са једначином  
 $x^2 = -\frac{c}{a}$ , односно важи  $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ . Дакле у овом случају једначина има два комплексна решења, ако су  $a$  и  $b$  истог знака, односно два реална супротна решења ако су  $a$  и  $b$  супротног знака.

7)  $x^2 + 7x = 0$       8)  $3x^2 - 2x = 0$       9)  $\frac{5}{6}x^2 - 4x = 0$

Извести заједно са ученицима закључак како се решавају у општем случају:  
 $ax^2 + bx = 0$ ,  $b \neq 0$ . Ова једначина је еквивалентна са  $x(ax + b) = 0$  одакле се добија  
 $x = 0 \vee ax + b = 0$ . Како је  $a \neq 0$  добијају се два реална решења  $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{b}{a}$

Додатни задатак: 10)  $3(x - 2)(x + 2) = x^2 - 5$

### **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 149, 150

### **Ток другог часа:**

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака. Поновити појам квадратне једначине.

### **Главни део часа: 35 минута**

Решити једначине

1) $(x+1)^2 = (2x-1)(x-1) + 5x + 3$	2) $(2x-3)^2 + (x-1)(x+2) = 2 - 11x$
3) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = 3\frac{1}{3}$	4) (152. в), збирка) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1}$
5) $ x^2 - 9  = 5$	6) $\frac{3x^2 - 1}{2} + \frac{2x + 1}{3} = \frac{x^2 - 2}{4} + \frac{1}{3}$
7) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$	

8) (додатни задатак)  $\frac{x-1}{3} + \frac{1}{2}x^2 = \frac{3(x-1)}{8} - \frac{x+11}{24}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 151, 152

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Решавање потпуних квадратних једначина

**Тип часа:** обрада

**Облици рада:** фронтални

**Методе рада:** предавање, објашњавање, дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка, интернет ([www.matematiranje.com](http://www.matematiranje.com))

**Циљ часа:** Усвајање поступка решавања потпуне квадратне једначине

**Образовни задаци:** Ученик треба да зна да потпуну квадратну једначину трансформише у канонски облик и да одреди решења применом обрасца

**Васпитни задаци:** развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности и прегледног записивања задатка.

**Функционални задаци:** примена у решавању практичних примера

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** квадратна једначина, образац за решавање квадратне једначине

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

Прошле године учили смо како да раставимо на линеарне чиниоце квадратни трином.

**Пример:**

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x - 4 &= 2\left(x^2 + \frac{7}{2}x - 2\right) = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{7}{4}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 2\right) = 2 \cdot \left(\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49+32}{16}\right) = 2 \cdot \left(\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\right) = \\ &= 2 \cdot \left(x + \frac{7}{4} - \frac{9}{4}\right) \cdot \left(x + \frac{7}{4} + \frac{9}{4}\right) = 2 \cdot (x - 4) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 4) \cdot (2x + 1) \end{aligned}$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0 \text{ ако } (x - 4)(2x + 1) = 0$$

Добијамо да су решења наведене једначине  $x_1 = 4 \vee x_2 = -\frac{1}{2}$

*Бакшали рукопис из Индије, датиран у 7. век је садржавао алгебарску формулу за решавање квадратних једначина. Мухамед Ал Хорезми (Персија, 9. век) је развио скуп формулe које су радиле за позитивна решења. Абрахам бар Хија (познат и под латинским*

именом Савасорда) је у Европи увео комплетно решење у својој књизи *Liber embadorum* из 12. Век а. Баскара II (1114. – 1185.), индијски математичар и астроном, је дао прво опште решење квадратне једначине са два корена. Списи кинеског математичара Јанг Хуја (1238—1298.) су први у којима се појављују квадратне једначине са негативним коефицијентима од 'x', мада он ово приписује Лиу Јуу. (<https://sr.wikipedia.org/sr/>)

### Главни део часа: 35 минута

Аналогно, изводимо образац за решавање потпуне квадратне једначине:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a \cdot \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \left( x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \\ &a \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \right)^2 \right] = 0 \Leftrightarrow a \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] = 0 \Leftrightarrow \\ &a \cdot \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0 \end{aligned}$$

Дакле, ако је  $ax^2 + bx + c = 0$ , онда решења једначине добијамо

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Образац за решавање квадратне једначине}$$

(Индијска метода решавања квадратне једначине)

Примери потпуних квадратних једначина: Решити квадратне једначине применом обрасца.

1)  $3x^2 + 4x - 7 = 0$

2)  $9x^2 - 12x + 4 = 0$

3)  $x^2 - 2x + 5 = 0$

4)  $\frac{2x+8}{x} - \frac{2x}{8+x} = 2$

5)  $\frac{2x}{x-9} - \frac{x^2+25}{x^2-81} = \frac{5}{x+9} - \frac{5}{x-9}$

$$\frac{2x(x+9)}{(x-9)(x+9)} - \frac{x^2+25}{(x-9)(x+9)} = \frac{5(x-9)-5(x+9)}{(x+9)(x-9)}$$

услови:  $x \neq \pm 9$

Решење

$$2x^2 + 18x - x^2 - 25 = 5x - 45 - 5x - 45$$

$$x^2 + 18x + 65 = 0$$

$$x_1 = -13 \quad x_2 = -5$$

6)  $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{6}{2x-1}$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 156-158, 199

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Решавање потпуних квадратних једначина

**Тип часа:** утврђивање, вежбање

**Облици рада:** фронтални, индивидуални

**Методе рада:** предавање, објашњавање, дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка, интернет ([www.matematiranje.com](http://www.matematiranje.com))

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да зна да потпуну квадратну једначину реши применом обрасца

**Васпитни задаци:** развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности и прегледног записивања задатка.

**Функционални задаци:** Увежбавање поступка за решавање потпуне квадратне једначине

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** квадратна једначина, образац за решавање квадратне једначине

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### **Главни део часа: 35 минута**

Реши једначине:

1)  $x^2 - 2m^2x + m^4 - n^4 = 0$

2) (160. Ѓ), збирка)  $4x^2 - 4ax + a^2 + 1 = 0$

3)  $(2x - a)^2 + (b - 2x)^2 = a^2 + b^2$

4) (200. д), збирка)  $\frac{m^2}{4(x^2 - m^2)} + \frac{x}{m - x} = \frac{2x}{m + x}$

5)  $x^2 + 4|x| + 3 = 0$

6)  $2x|x - 3| + |x + 5| = 0$

Додатни задаци:

1) (203, збирка)  $\frac{a}{bx - x} - \frac{a - 1}{x^2 - 2bx^2 + x^2b^2} = 1$

2) (201, збирка)  $1 - \frac{2b}{x - a} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ax + x^2}$

3) (202, збирка)  $\frac{2}{x + a} - \frac{b - 1}{bx} = \frac{1}{bx - b^2} + \frac{1}{bx - x^2}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 153, 161а), б), в), г), 200

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Решавање потпуних квадратних једначина

**Тип часа:** вежбање и оцењивање

**Облици рада:** групни

**Методе рада:** решавање задатака

**Наставна средства:** наставни листићи, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Увежбавање поступка решавања потпуне квадратне једначине

**Образовни задаци:** Ученик треба да зна да потпуну квадратну једначину реши применом обрасца

**Васпитни задаци:** развијање критичког односа према свом знању, кооперативности, комуникације и солидарности

**Функционални задаци:** увежбавање поступка за решавање потпуне квадратне једначине

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Наставник дели унапред припремљене наставне листиће и на крају часа врши оцењивање и евалуацију применом презентације

**Активност ученика:** раде задатке у групи

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** квадратна једначина, образац за решавање квадратне једначине

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака. Поделити ученике на четири групе, приближних постигнућа.

### **Главни део часа: 35 минута**

#### **Прва група**

1. (157. а), збирка) Решити следећу квадратну једначину:  $(x+9)^2 - (x+8)^2 = (2x+11)^2$

$$\frac{x+1}{x^2-3x} + \frac{x-9}{2x^2-18} - \frac{x}{x^2+3x} = 0$$

2. Решити следећу квадратну једначину  $\frac{a+4b}{x+2b} - \frac{a-4b}{x-2b} = 4\frac{b}{a}$

$$\frac{a+4b}{x+2b} - \frac{a-4b}{x-2b} = 4\frac{b}{a}$$

#### **Друга група**

1. (157.б), збирка) Решити следећу квадратну једначину:  $(3-x)^2 - (20+4x)^2 = (x+15)^2$

$$\frac{x+1}{x^2-5x} - \frac{x+6}{x^2-25} + \frac{x+3}{3x^2+15x} = 0$$

2. Решити следећу квадратну једначину  $\frac{x+1}{x^2-5x} - \frac{x+6}{x^2-25} + \frac{x+3}{3x^2+15x} = 0$

$$3. \text{ (202, збирка)} \text{ Решити следећу квадратну једначину} \quad \frac{2}{x+a} - \frac{b-1}{bx} = \frac{1}{bx-b^2} + \frac{1}{bx-x^2}$$

### Трећа група

1. (157. в), збирка) Решити следећу квадратну једначину:  

$$(5x-2)(8x-1)-9=(3x+1)(4x-1)$$

$$\frac{2x+3}{x^2-4x} - \frac{8x+19}{3x^2-48} + \frac{x+2}{x^2+4x} = 0$$
2. Решити следећу квадратну једначину  

$$\frac{a+6b}{x+3b} - \frac{a-6b}{x-3b} = 6 \frac{b}{a}$$
3. Решити следећу квадратну једначину

### Четврта група

1. Решити следећу квадратну једначину: 
$$(2x+3)^2 - (x+8)^2 = 2(x-2)^2$$
  

$$\frac{x+1}{x^2-7x} - \frac{x+8}{x^2-49} + \frac{x+2}{2x^2+14x} = 0$$
2. Решити следећу квадратну једначину  

$$\frac{1}{2n+nx} - \frac{1}{2x-x^2} = \frac{2(n+3)}{x^3-4x}$$
3. Решити следећу квадратну једначину

### Завршни део часа: 5 минута

Упоредити решења, оценити ученике.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Дискриминанта и природа решења квадратних једначина

**Тип часа:** обрада и утврђивање

**Облици рада:** фронтални, индивидуални

**Методе рада:** предавање, објашњавање, дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка, интернет ([www.matematiranje.com](http://www.matematiranje.com))

**Циљ часа:** Израчунавање дискриминанте и извођење закључака о природи решења квадратне једначине

**Образовни задатак:** ученик треба да зна да израчуна дискриминанту и одреди природу и број решења квадратне једначине у зависности од знака дискриминанте

**Васпитни задатак:** развијање концентрације, систематичности, аналитичности

**Функционални задатак:** повезивање нових поjmова са већ наученим градивом

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** дискриминанта, природа решења

**Ток првог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

**Дискриминанта и природа решења квадратне једначине:**

Израз  $D = b^2 - 4ac$  назива се дискриминанта ( латински: "оно што раздваја" ) квадратне једначине.

- Ако је дискриминанта позитивна, постоје два различита решења квадратне једначине, оба реална.
- Ако је дискриминанта једнака нули, постоји тачно једно решење квадратне једначине и то решење је реалан број. Он се некада назива двоструким решењем, а његова вредност је:  $x = -\frac{b}{2a}$

- Ако је дискриминанта негативна нема реалних решења квадратне једначине. Уместо њих постоје два различита коњуговано-комплексна решења.

1) Испитај природу решења следећих квадратних једначина:

a)  $3x^2 + 2x + 1 = 0$       б)  $5x^2 + 8x - 2 = 0$       в)  $4x^2 + 4x + 1 = 0$

2) Одреди вредност параметра  $k$  тако да решења једначине буду једнака:  
 $x^2 + 2(3 - k)x + 2k - 3 = 0$

Решење:

$$D = (2(3 - k))^2 - 4(2k - 3)$$

$$D = 4k^2 - 32k + 48 = 0$$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = 6$$

3) Зависно од параметра  $k$  испитај природу решења следеће квадратне једначине:  
 $kx^2 + 2(k - 6)x + k - 3 = 0$

4) Одреди вредност параметра  $a$  за који једначина има реална решења.  
 $2ax^2 + 3x - 1 = 0$

5) За које вредности параметра  $k$  једначина има коњуговано-комплексна решења:  
 $4(k - 1)x^2 - 4(k + 2)x - k + 3 = 0$  ?

### **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 163-165

**Ток другог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

- 1) Одреди вредност параметра  $k$  тако да решења једначине буду реална и различита:

$$x^2 - 2(k-3)x + 3k - 11 = 0$$

- 2) Одреди вредност параметра  $k$  тако да решења једначине буду коњуговано комплексна:

$$(3k-11)x^2 - 2(k-3)x + 1 = 0$$

- 3) Одреди вредност параметра  $k$  тако да решења једначине буду реална и различита:

$$x^2 - 2(k-5)x + 7k - 45 = 0$$

- 4) Одреди вредност параметра  $k$  тако да решења једначине буду коњуговано комплексна:

$$(7k-45)x^2 - 2(k-5)x + 1 = 0$$

Додатни задаци:

- 5) Одреди параметар  $m$  тако да решења буду двострука:

a)  $(2m-1)x^2 - (m+2)x + m-1 = 0$       6)  $(m+1)x^2 + 2(m-1)x + 4m + 4 = 0$

- 6) Одреди параметар  $m$  тако да решења једначине  $(m+1)x^2 - 2mx + m = 0$  буду реална.

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 166,167

*Квадратна једначина и квадратна функција*

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци

**Тип часа:** вежбање

**Облици рада:** фронтални, индивидуални

**Методе рада:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка,

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Увежбавање поступка решавања потпуне квадратне једначине и утврђивања природе решења

**Васпитни задатак:** развијање концентрације, систематичности, аналитичности

**Функционални задатак:** повезивање нових појмова са већ наученим градивом

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** квадратна једначина, природа решења

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### Главни део часа: 35 минута

1) Решити следећу квадратну једначину:

$$\frac{x+1}{x^2 - 3x} + \frac{x-9}{2x^2 - 18} - \frac{x}{x^2 + 3x} = 0$$

2) Решити следећу квадратну једначину:

$$\frac{x+1}{x^2 - 5x} - \frac{x+6}{x^2 - 25} + \frac{x+3}{3x^2 + 15x} = 0$$

3) Реши једначину:

$$\frac{2x+1}{x-1} + \frac{x-1}{2x+1} = \frac{5x+4}{(x-1)(2x+1)}$$

4) Реши по x једначину (a и b су реални параметри)

$$\text{a)} \frac{b+x}{a-x} - \frac{b-x}{a+x} = \frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}$$

$$\text{б)} \frac{x^2 - a^2}{b^2} + \frac{x^2 - b^2}{a^2} + \frac{x^2 + a^2 + b^2}{ab} = 0$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 200

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Вијетова правила

**Тип часа:** обрада

**Облици рада:** фронтални

**Методе рада:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка,

**Циљ часа:** Уочавање везе између решења квадратне једначине и њених коефицијената

**Образовни задатак:** Научити ученике Вијетове формуле и њихову примену

**Васпитни задатак:** развијање концентрације, систематичности, аналитичности

**Функционални задатак:** научити одређивање решења када су целобројна

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** Вијетова правила

### Уводни део часа: 10 минута

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

Мотивациони разговор: Вијет.

(Франциско Вијет је био француски математичар. Рођен је 1540. године. По завршетку студија права радио је као адвокат. Око 1567. године постаје саветник Парламента Бреста у Рену. Године 1589. добија положај саветника парламента у Труу, затим постаје краљев лични саветник и на том положају остаје до своје смрти 1603. године. Док је био у Труу, Вијет је открио кључ шпанске шифре, који се састојао од више од 500 карактера и ово је значило да су све поруке Французи могли лако да прочитају. Имао је значајна достигнућа у математици. <https://sr.wikipedia.org/sr>)



### Главни део часа: 30 минута

Теорема:

Бројеви  $x_1$  и  $x_2$  су решења квадратне једначине  $ax^2 + bx + c = 0$  ако и само ако је

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Наведене једнакости се називају Вијетове формуле.

Доказ:  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

1) Састави квадратну једначину чија су решења: a)  $-\frac{5}{6}$  и  $\frac{7}{3}$       b)  $\frac{1}{2} \pm \frac{3}{5}i$ .

2) Нека су  $x_1$  и  $x_2$  решења квадратне једначине  $x^2 - 9x + 20 = 0$ . Израчунати:

a)  $3x_1 + 3x_2$       b)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$       в)  $x_1^2 + x_2^2$

г)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$       д)  $x_1^3 + x_2^3$       ђ)  $x_1^4 + x_2^4$ .

3) У једначини:  $x^2 - 8x + m = 0$  одреди  $m$  тако да један корен једначине буде три пута већи од другог.

4) Одреди  $k$  тако да збир кубова корена једначине  $x^2 - 6x + k + 1 = 0$  буде једнак 18.

$$x_1^3 + x_2^3 = 18$$

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = 18$$

Решење:  $(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = 18$   
 $6 \cdot (36 - 3 \cdot (k + 1)) = 18$   
 $k = 10$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 170, 173-176

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Вијетова правила

**Тип часа:** утврђивање, вежбање

**Облици рада:** фронтални

**Методе рада:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање знања из области примене Вијетових правила

**Образовни задатак:** Ученик треба да утврди и примени Вијетова правила при решавању различитих типова задатака

**Васпитни задатак:** развијање концентрације, систематичности, аналитичности

**Функционални задатак:** научити одређивање решења када су целобројна

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** Вијетова правила

**Ток првог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

1) (210, збирка) У једначини  $3x^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0$  одреди реалан број  $m$  ако је  $9x_1x_2^2 + 3x_1^3 + 9x_1^2x_2 + 3x_2^3 = 192$ .

2) (180, збирка) У квадратној једначини  $3kx^2 - (6k-1)x + k + 8 = 0$ , одреди  $k$  тако да једно решење буде реципрочна вредност другог решења.

3) (207, збирка) Не решавајући једначину  $x^2 + 4x - 21 = 0$  одреди вредност израза:  
$$\frac{3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2}{x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + x_2^3}.$$

- 4) (209, збирка) Одреди вредност параметра  $a$  тако да корени једначине:  $x^2 - x + a - 2 = 0$  задовољавају услов:  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}x_1x_2 + 4 = 0$ .
- 5) (212, збирка) У једначини  $4x^2 - 15x + 4k^2 = 0$  одреди вредност реалног параметра  $k$  тако да једно решење једначине буде квадрат другог.

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 177-179, 181-184, 211, 213, 214

**Ток другог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

1. (Пријемни испит, ФОН 2015)

Одреди вредност параметра  $m$  тако да решења  $x_1$  и  $x_2$  квадратне једначине

$$x^2 - \sqrt{2}x + m - 3 = 0$$

задовољавају једначину  $x_1^3 + x_2^3 = 20\sqrt{2}$ .

2. (Пријемни испит, ФОН 2016)

Одреди вредност параметра  $m$  тако да решења  $x_1$  и  $x_2$  квадратне једначине

$$4x^2 - 2mx + m - 3 = 0$$

задовољавају једначину  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 4$ .

3. (185. збирка)

Применом Вијетових формулa одреди вредност реалног параметра  $m$  тако да решења једначине  $x^2 - 2(m-1)x - 4m = 0$  буду негативна.

(208. збирка)

Не решавајући једначину  $x^2 - 8x + 15 = 0$  одреди вредност израза

$$\frac{5x_1^2 - 5x_1x_2 + 7x_2^2}{x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 - x_2^3}, \quad x_1 > x_2$$

Додатни задаци

4. (221. збирка)

Одредити вредност реалних бројева  $m$  и  $n$  за које једначине

$(m-1)x^2 - (m+1)x + m = 0$  и  $nx^2 - (2n+2)x + 2n = 0$  имају оба решења заједничка

5. (218. збирка)

Дата је квадратна једначина  $ax^2 + bx + c = 0$  чија су решења  $x_1$  и  $x_2$ . Формирати нову квадратну једначину чија ће решења бити  $-x_1$  и  $-x_2$ .

### **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 186, 216, 220

### **Ток трећег часа:**

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### **Главни део часа: 35 минута**

1. (190. збирка)

Број 21 растави на два сабирка тако да збир квадрата тих делова буде 261.

2. (191. збирка)

Производ половине и осамнаестине неког броја једнак је 1. Који је то број?

3. (224. збирка)

Састави квадратну једначину чија решења  $x_1$  и  $x_2$  задовољавају релације:

$$3x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) = -2 \quad \text{и} \quad 7x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = 57$$

4. (225. збирка)

Дата је једначина  $x^2 - 8x + 12 = 0$ . Састави једначину са решењима  $x_1 + \frac{1}{x_1}$  и  $x_2 + \frac{1}{x_2}$  не решавајући дату једначину.

Додатни задаци

5. (231. збирка)

Фабрика се обавезала да трговини испоручи за одређено врме 600 комада једног производа. Повећањем продуктивности рада фабрика је успела да израђује дневно 10 комада више тог производа, због чега је испоруку завршила три дана раније. Колико је комада тог производа фабрика израђивала дневно и колико је било повећање продуктивности рада?

6. (235. збирка)

Удаљеност два града је 588 km. Брзи воз пређе ту удаљеност за 2 сата и 20 минута, пре него путнички. колика је брзина сваког од ових возова ако се њихове брзине разликују за 21km/h?

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 224. 6), 226, 227, 232, 237,238

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце

**Тип часа:** обрада

**Облици рада:** фронтални

**Методе рада:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка,

**Циљ часа:** Стицање и развијање вештина у вези са растављањем квадратног тринома

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да растави квадратни трином на чиниоце уз употребу допуне до квадрата бинома и разлике квадрата

**Васпитни задатак:** развијање концентрације, систематичности, аналитичности

**Функционални задатак:** стварање рутине код ученика за свођење израза на једноставнији израз ради ефикаснијег израчунања

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** Квадрат бинома, разлика квадрата

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### Главни део часа: 35 минута

Поновимо како смо дошли до обрасца за решавање квадратне једначине, на сличан начин следи:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \cdot \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \cdot \left( x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = \\ &= a \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \right)^2 \right] = a \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] = \\ &= a \cdot \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = a \cdot \left( x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \end{aligned}$$

Уочимо: Ако су нам дата решења  $x_1$  и  $x_2$  квадратне једначине  $ax^2 + bx + c = 0$ , тада је  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , односно дата једначина је еквивалентна једначини:  $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ .

1. Упростити израз:  $\frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 + 5x + 3}$

Решење  $\frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 + 5x + 3} = \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1)}{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1} \quad x \neq -\frac{3}{2}, x \neq -1$

2. (188. збирка) Скратити разломак a)  $\frac{2x^2 - 7x + 3}{2x^2 + 3x - 2}$  б)  $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 5x + 2}$

3. (189. збирка) Скратити разломак б)  $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

4. Решити једначину:

$$\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+2} = \frac{3x-6}{x^2+x-2}$$

5. (159. збирка) Решити једначину:  $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{6}{2x-1}$

### **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 188.в), 189.а), в)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце

**Тип часа:** утврђивање

**Облици рада:** фронтални

**Методе рада:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка,

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Ученик треба да обнови и примени стечено знање растављања квадратног тринома на чиниоце

**Васпитни задатак:** развијање концентрације, систематичности, аналитичности

**Функционални задатак:** изазивање код ученика свести о значају повезивања градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** Квадрат бинома, разлика квадрата

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### Главни део часа: 35 минута

1. Решити једначину  $\frac{5x}{2x^2 - x - 1} - \frac{5}{2x + 1} = \frac{4x - 5}{x^2 - 1}$
2. Решити једначину  $\frac{2x + 1}{x^2 + x - 6} - \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{6}{x^2 - 9}$
3. Реши једначину  $\left| \frac{x^2 - x + 6}{x^2 + x - 12} \right| = \frac{5}{7}$
4. Израчунати вредност израза  $A = \frac{2x^2 + 7x - 15}{2x - 3}$  ако је  $x = 1,1999$
5. Израчунати вредност израза  $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + x - 4} \left( \frac{2x^2 + 3x - 9}{3x^2 + 13x + 12} \right)^{-\frac{1}{2}}$  за  $x = -1,9$

Решење 
$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + x - 4} \left( \frac{2x^2 + 3x - 9}{3x^2 + 13x + 12} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1)}{3(x - 1)\left(x + \frac{4}{3}\right)} \left( \frac{3(x + 3)\left(x + \frac{4}{3}\right)}{2(x + 3)\left(x - \frac{3}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{2x - 3}{3x + 4} \cdot \left( \frac{3x + 4}{2x - 3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{-6,8}{-1,7} \left( \frac{-1,7}{-6,8} \right)^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 195, 201

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Једначине које се своде на квадратне

**Тип часа:** утврђивање

**Облици рада:** фронтални

**Методе рада:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка,

**Циљ часа:** Усвајање поступка својења једначина на квадратне једначине коришћењем методе замене

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да препозна смену, сведе једначину на квадратну и реши једначину

**Васпитни задатак:** развијање концентрације, систематичности, аналитичности

**Функционални задатак:** повезивање претходно наученог градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** Квадрат бинома, разлика квадрата

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### **Главни део часа: 35 минута**

Реши једначине

1)  $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

2) (збирка 240 г)  $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

3) (збирка 241 в)  $\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = x^2 + 2x + 4$

4) (збирка 241 г)  $x(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{9}{16}$

5) (збирка 241 Ѓ)  $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$

6)  $(x^2 - 10x)^2 + 37(x^2 - 10x) + 336 = 0$  смена  $t = x^2 - 10x$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 239, 240, 241

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Симетричне једначине

**Тип часа:** утврђивање

**Облици рада:** фронтални

**Методе рада:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање симетричне једначине

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да препозна смену, сведе једначину на квадратну и реши једначину

**Васпитни задатак:** развијање концентрације, систематичности, аналитичности

**Функционални задатак:** повезивање претходно наученог градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** Квадрат бинома, разлика квадрата

**Ток првог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

Посматрајмо једначину облика:  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad a \neq 0$ .

Дату једначину можемо поделити са  $x^2$  пошто је нула није решење.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} &= 0 \\ \text{группишијемо израз} \quad a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c &= 0 \end{aligned}$$

Користећи смену  $t = x + \frac{1}{x}$ ,

$$\text{односно } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$$

дату једначину сводимо на квадратну:  $at^2 + bt + c - 2a = 0$

1. (242, збирка)

Решити једначине

a)  $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

b)  $6x^4 + 7x^3 - 26x^2 + 7x + 6 = 0$

Посматрајмо једначину облика:  $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \quad a \neq 0$ .

Дату једначину можемо поделити са  $x^2$  пошто је нула није решење.

$$ax^2 + bx + c - \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

групишемо израз

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Користећи смену  $t = x - \frac{1}{x}$ ,

односно  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = t^2 + 2$

дату једначину сводимо на квадратну:  $at^2 + bt + c + 2a = 0$

2. Решити једначину  $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$

3. (243. 6), збирка) Решити једначину  $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

Заменом  $x=-1$  добијамо да је једно решење једначине  $x=-1$ .

Уколико дати полином поделимо са  $x+1$  (Безуова теорема)

добијамо израз облика  $(x+1)(2x^2 + x + 2) = 0$

### **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 242. 6,г)

## Ток другог часа:

## Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

- 1) (243. г), збирка) Решити једначину  $6x^5 - 5x^4 - 29x^3 - 29x^2 - 5x + 6 = 0$

Заменом  $x = -1$  добијамо да је једно решење једначине  $x = -1$ .

Уколико дати полином поделимо са  $x+1$  ( Безуова теорема)

добијамо израз облика  $(x+1)(6x^4 - 11x^3 - 18x^2 - 11x + 6) = 0$

- 2)** (244. а), збирка) Решити једначину  $2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2 = 0$

**3)** (244. г), збирка) Решити једначину  $15x^6 - 128x^5 + 275x^4 - 275x^2 + 128x - 15 = 0$

Заменом  $x=-1$  и  $x=1$  добијамо да су два решења једначине  $x=-1$  и  $x=1$

Уколико дати полином поделимо са  $(x+1)(x-1)$  односно са  $x^2 - 1$  (Безуова теорема) добијамо израз облика  $(x^2 - 1)(15x^4 - 128x^3 + 290x^2 - 128x + 15) = 0$

- 4) (245, збирка) Како гласи реципрочна једначина чија су решења  
a)  $5, \frac{1}{5}, 3, \frac{1}{3}, -1, 1$       б)  $-1, 1, 3, \frac{1}{3}, -i, i$

### **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 243. а), в) 244. б), в)

**Ток трећег часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

Увођењем одговарајуће смене решити једначину

1.  $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$

$$(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2 / : x^2$$

Упутство  $\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9$  смена  $t = 2x + \frac{1}{x}$

2.  $\frac{(x-1)x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{2}{9}$  Упутство  $\frac{x^2 - x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{2}{9}$  смена  $t = x^2 - x$

3.  $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$  смена  $t = x^2 - 2x$

4.  $\frac{x+1}{x^3+x-1} + \frac{x^3+x-1}{x+1} = 2$  смена  $t = \frac{x+1}{x^3+x-1}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 246. а, б)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** комбиновани задаци

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увежбавање и рекапитулација стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да увежба стечена знања о квадратним једначинама

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Развијање свести ученика о потреби и значају повезивања градива и његове примене

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.5. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне и квадратне једначине.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** квадратна једначина

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### **Главни део часа: 35 минута**

- 1) Решити једначину

$$2 + \frac{2x-1}{x+2} = \frac{4x+3}{2x+1}$$

- 2) Решити једначину

$$4x^2 - 4ax + a^2 + 1 = 0$$

- 3) За које вредности реалног параметра  $m$  квадратна једначина има двострука реална решења

$$(2m+1)x^2 - (m+2)x + m - 3 = 0$$

- 4) Саставити квадратну једначину чија су решења:

$$x_1 = 2 + i\sqrt{3}, \quad x_2 = 2 - i\sqrt{3}$$

5) У једначини  $3x^2 - 2(m+1)x + m-1 = 0$  одреди реалан параметар  $m$  ако је  $9x_1x_2^2 + 3x_1^3 + 9x_1^2x_2 + 3x_2^3 = 192$

6) Решити једначину  $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$

**Завршни део часа: 5 минута**

Продискутовати са ученицима који задаци су им задавали највише проблема при изради и решити их заједно са ученицима. Домаћи задатак ТЕСТ 2.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Системи са једном линеарном и једном квадратном једначином

**Тип часа:** комбиновани: обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање система једначина

**Образовни задаци:** Ученик треба зна да из линеарне једначине изрази једну непознату и замени у квадратну једначину, а затим да реши исту

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоузданаја ученика.

**Функционални задаци:** Разумети значај примене система једначина у реалним ситуацијама

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.6. Решава системе линеарних једначина са и без параметара и једноставне системе

нелинеарних једначина.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** систем једначина

### **Уводни део часа: 5 минута**

Подсетити се о појму система линеарних једначина, аналогно томе увести појам система једначина које садрже бар једну квадратну једначину.

### **Главни део часа: 35 минута**

Реши системе:

$$1) \begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 7 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

$$2) \begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ xy &= 6 \end{aligned}$$

$$3) \begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{25}{12} \\ x + y &= 7 \end{aligned}$$

$$4) \begin{aligned} \frac{2x+y}{x+y} + \frac{x+4y}{x^2-y^2} &= -\frac{5}{3} \\ x+y &= 3 \end{aligned}$$

$$5) \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + 2y^2 &= 41 \end{aligned}$$

$$6) \begin{aligned} x^2 + y^2 + x + y &= 32 \\ 12(x+y) &= 7xy \end{aligned}$$

Решење 
$$\begin{aligned} (x+y)^2 - 2xy + x + y &= 32 \\ 12(x+y) &= 7xy \end{aligned}$$

Након смене  $a = x + y, b = xy$  добијамо систем 
$$\begin{aligned} a^2 - 2b + a &= 32 \\ 12a &= 7b \end{aligned}$$

Одакле је  $a = 7, b = 12$  или  $a = -\frac{32}{7}, b = -\frac{384}{49}$

Решавањем система  $x + y = 7, xy = 12$  и  $x + y = -\frac{32}{7}, xy = -\frac{384}{49}$  добијамо резултат.

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 317-320

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Системи са две квадратне једначине.

**Тип часа:** комбиновани: обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање система једначина

**Образовни задаци:** Ученик треба да зна различите методе решавања система једначина

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.6. Решава системе линеарних једначина са и без параметара и једноставне системе

нелинеарних једначина.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** систем једначина

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### **Главни део часа: 35 минута**

Реши системе:

$$\begin{array}{l} 1) \begin{aligned} x^2 + y^2 + x + y &= 18 \\ x^2 - y^2 + x - y &= 6 \end{aligned} \qquad 2) \begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 &= 12 \\ 5x^2 - 2y^2 &= 11 \end{aligned} \qquad 3) \begin{aligned} x^2 + y &= 13 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 4) \begin{aligned} 9x^2 + y^2 &= 45 \\ xy &= 6 \end{aligned} & 5) \begin{aligned} x + y^2 &= 7 \\ xy^2 &= 12 \end{aligned} & 6) \begin{aligned} \frac{1}{y^2} - \frac{3}{x^2} &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x^2 y^2} &= 0,25 \end{aligned} \end{array}$$

$$7) \frac{1}{y^2} - \frac{3}{x^2} = 13$$
$$\frac{1}{x^2 y^2} = 100$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 321, 322, 323, 324

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Решавање система од две квадратне једначине од којих је једна хомогена

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање система једначина

**Образовни задаци:** Ученик треба зна различите методе решавања система једначина

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоузданаја ученика.

**Функционални задаци:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.6. Решава системе линеарних једначина са и без параметара и једноставне системе нелинеарних једначина.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** хомогена једначина

### **Уводни део часа: 10 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

Једначина облика  $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$  назива се хомогена једначина другог степена

(јер су сви чланови полинома  $ax^2 + bxy + cy^2$  истог степена 2)

Хомогена једначина има решење  $(0,0)$ , па ако се претпостави да је  $y \neq 0$  дељењем дате

једначине са  $y^2$  добијамо једначину облика  $a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c = 0$ .

Увођењем смене  $t = \frac{y}{x}$  хомогена једначина се своди на квадратну:  $at^2 + bt + c = 0$ .

**Главни део часа: 30 минута**

Реши системе

$$1) \begin{array}{l} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{array} \quad 2) \begin{array}{l} x^2 + xy - 6y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 \end{array}$$

$$3) (329.\text{д}), \text{збирка} \quad \begin{array}{l} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 20 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{l} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 18 \end{array} \quad 5) \begin{array}{l} x^2 - 2xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 y^2 + x + y = -1 \end{array}$$

$$6) \begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ 2x^2 - 3xy + 4y^2 = 18 \end{array}$$

Упутство: Множењем прве једначине са  $-6$ , а затим сабирањем једначина дати систем постаје еквивалентан са системом

$$\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ 4x^2 + 9xy + 2y^2 = 0 \end{array} \quad \text{код кога је једна једначина хомогена}$$

$$7) \begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 300 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 500 \end{array}$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 329, 333

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Системи једначина - вежбање

**Тип часа:** утврђивање градива

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање и увежбавање поступка за решавање система једначина

**Образовни задаци:** Ученик треба зна различите методе решавања система једначина

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.6. Решава системе линеарних једначина са и без параметара и једноставне системе

нелинеарних једначина.

2.МА.2.1.5. Трансформише алгебарске изразе.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** систем једначина

## Ток првог часа

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### Главни део часа: 35 минута

Решити системе једначина:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x^2 + xy + y^2 = 4 \\ & x + xy + y = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & x^2 - xy + y^2 = 7 \\ & x^3 + y^3 = 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & xy(x+y) = 2 \\ & x^3 + y^3 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & x^2 + y^2 = 13 \\ & x^3 + y^3 = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & x - y = 2 \\ & x^3 - y^3 = 152 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & x + xy + y = 259 \\ & \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{aligned}$$

$$7) \begin{aligned} x + y + \sqrt{x + y} &= 30 \\ xy + \sqrt{xy} &= 156 \end{aligned}$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 326, 327

**Ток другог часа**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

- 1) (350, збирка) Збир квадрата два броја је 400. Ако се први увећа за 6, други за 8, збир квадрата тада је 900. Који су то бројеви?
- 2) (349, збирка) Производ два броја је 180. Ако се сваки чинилац увећа за 3, производ постаје 270. који су то бројеви?

$$3) \text{ (335, збирка) Решити систем једначина: } \begin{aligned} 2x^2 - 3xy + 5y &= 5 \\ (x - 2)(y - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$4) \text{ (336, збирка) Решити систем једначина: } \begin{aligned} 4x^2 + y^2 - 3xy &= 1 \\ y^2 - 1 &= 4x^2 + 4x \end{aligned}$$

$$5) \text{ (346, збирка) Решити систем једначина: } \begin{aligned} x^3 + y^3 &= 7(x + y) \\ x^3 - y^3 &= 19(x - y) \\ x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 &= 525 \\ x + xy + xy^2 &= 35 \end{aligned}$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 337-345, 348

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Квадратна функција-основни појмови

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка, рачунар, пројектор, интернет

**Циљ часа:** Упознавање са графиком квадратне функције

**Образовни задаци:** Ученик треба зна утицај вредности параметара на изглед квадратне функције, да уочава особине квадратне функције

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоузданаја ученика.

**Функционални задаци:** Развијање вештина за цртање графика функције

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинуса.

2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** квадратна функција

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

Поновити основне појмове о линеарној функцији.

### Главни део часа: 35 минута

Дефиниција: Функција

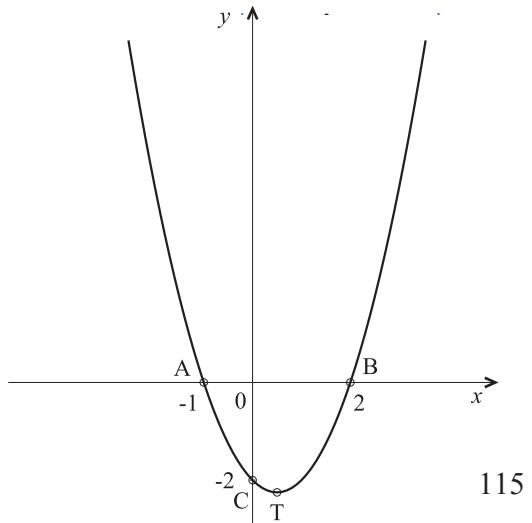
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}.$$

назива се квадратна функција.

На слици је нацртан график

$$y = x^2 - x - 2$$



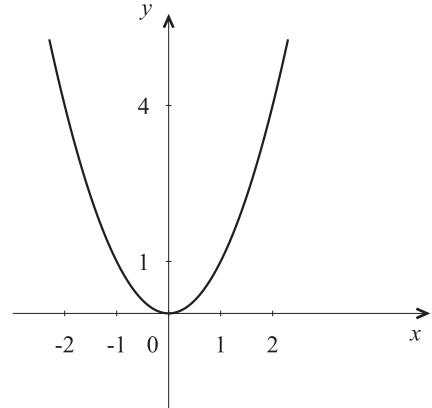
Питање: По чему је ова функција слична са линеарном функцијом, а по чему се разликује од линеарне функције? Наводити ученике да уоче да се неке особине линеарне функције појављују и код квадратне функције (Област дефинисаности, област вредности функције, знак, монотоност, нуле), а да се екстремна вредност први пут појављује. Овде поновити дефиниције ових особина, као и дефинисати појам екстремних вредности.

**НАПОМЕНА:** Добро би било користити рачунар за илустрацију особина функције, слика је урађена у ГеоГебри, коришћењем клизача и променом вредности за коефицијенте  $a$ ,  $b$  и  $c$  једноставно је приказати промену особина квадратне функције (или поделити ученицима график функције на наставним листићима), још једна могућност је симулација на линку [https://phet.colorado.edu/sims/equation-grapher/equation-grapher\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/equation-grapher/equation-grapher_en.html).

Нацртајмо функцију  $y = x^2$ .

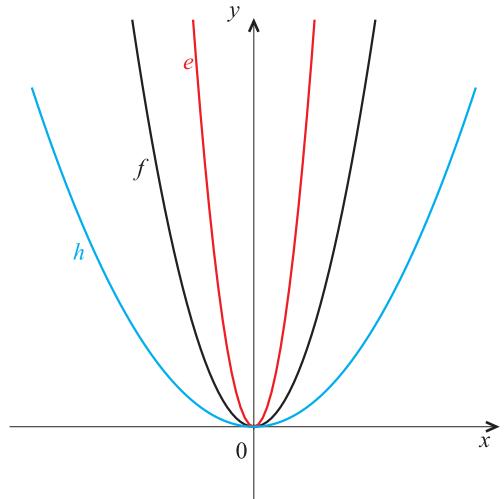
$x$	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

- Функција  $y = x^2$  је дефинисана за све реалне бројеве  $x$
- Сече осу  $x$  у тачки  $(0,0)$ . Ову тачку ћемо звати минимална вредност функције
- Позитивна је за сваки  $x \neq 0$  (изнад осе  $x$ )
- Опада за  $x < 0$  и расте за  $x > 0$



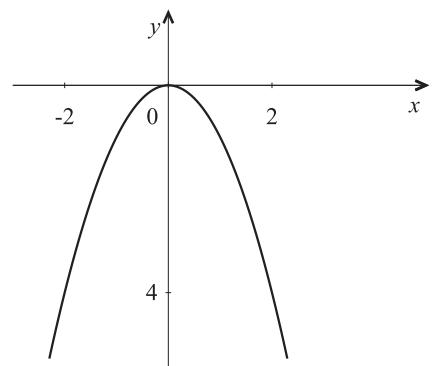
Функција  $y = ax^2$ ,  $a > 0$

- Вредност функције  $y = ax^2$  је  $a$  пута већа од вредности функције  $y = x^2$
- Ако је  $a > 1$  графици функција облика  $y = ax^2$  су "изнад" графика функције  $y = x^2$
- Ако је  $0 < a < 1$  графици функција облика  $y = ax^2$  су "испод" графика функције  $y = x^2$
- Функција  $y = ax^2$ ,  $a > 0$  је дефинисана за све реалне бројеве  $x$
- Сече осу  $x$  у тачки  $(0,0)$ . Ову тачку ћемо звати минимална вредност функције
- Позитивна је за сваки  $x \neq 0$  (изнад осе  $x$ )
- Опада за  $x < 0$  и расте за  $x > 0$



Нацртајмо функцију  $y = -x^2$ .

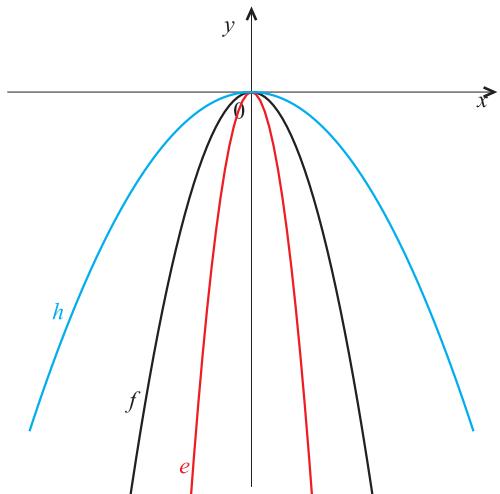
$x$	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4



- Функција  $y = -x^2$  је дефинисана за све реалне бројеве  $x$
- Сече осу  $x$  у тачки  $(0,0)$ . Ову тачку ћемо звати максимална вредност функције
- Негативна је за сваки  $x \neq 0$  ( испод осе  $x$ )
- Расте за  $x < 0$  и опада за  $x > 0$

Функција  $y = ax^2$ ,  $a < 0$

- Ако је  $a < -1$  графици функција облика  $y = ax^2$  су "испод" графика функције  $y = -x^2$
- Ако је  $-1 < a < 0$  графици функција облика  $y = ax^2$  су "изнад" графика функције  $y = -x^2$
- Функција  $y = ax^2$ ,  $a < 0$  је дефинисана за све реалне бројеве  $x$
- Сече осу  $x$  у тачки  $(0,0)$ . Ову тачку ћемо звати максимална вредност функције
- Негативна је за сваки  $x \neq 0$  ( испод осе  $x$ )
- Расте за  $x < 0$  и опада за  $x > 0$



### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 249, 250

*Квадратна једначина и квадратна функција*

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Читање графика квадратне функције

**Тип часа:** комбиновани: обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Проширивање знања о квадратним функцијама

**Образовни задаци:** Ученик треба зна да скицира график функције користећи графике познатих функција и трансляцију

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоузданаја ученика.

**Функционални задаци:** Увежбавање цртања графика функције

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинуса.

2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** квадратна функција

**Ток првог часа**

**Уводни део часа: 5 минута**

Поновити особине функција облика  $y = ax^2$

**Главни део часа: 35 минута**

**Примери.**

Нацртати и описати функције:

$$y = 2x^2, \quad y = -3x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = -\frac{3}{4}x^2$$

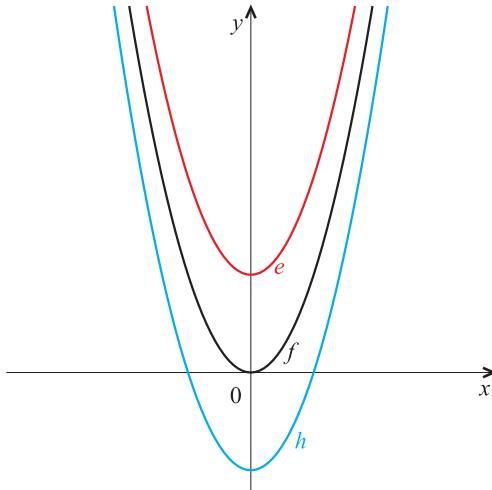
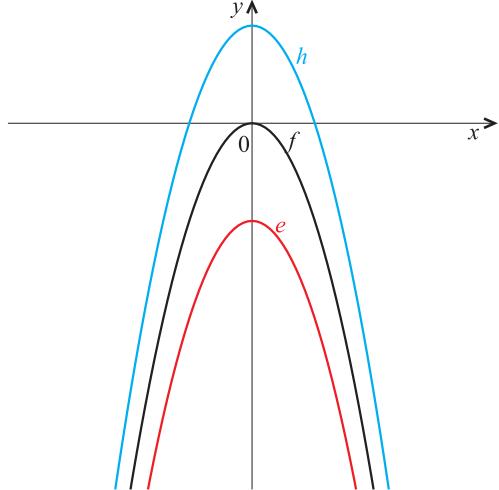


График функције  $y = ax^2 + n, a > 0$  се добија тако што се график функције  $y = ax^2, a > 0$  транслира дуж осе у за вредност с. Ако је  $n > 0$  график се транслира изнад  $y = ax^2$ , а ако је  $n < 0$  график се транслира испод  $y = ax^2$ .

График функције  $y = ax^2 + n, a < 0$  се добија тако што се график функције  $y = ax^2, a < 0$  транслира дуж осе у за вредност с. Ако је  $n > 0$  график се транслира изнад  $y = ax^2$ , а ако је  $n < 0$  график се транслира испод  $y = ax^2$ .

1. Нацртати и описати функцију:  $y = 2x^2 - 8$
2. Нацртати и описати функцију:  $y = -3x^2 - 9$

(Уколико је могуће користити ГеоГебру за приказивање графика, или презентацију или поделити ученицима графике функција на наставним листићима.)



### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 254, 255

**Ток другог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

График функције  $y = a(x - m)^2, a > 0$  се добија тако што се график функције  $y = ax^2, a > 0$  транслира дуж осе  $x$  за вредност  $m$ . Ако је  $m > 0$  график се транслира десно од  $y = ax^2$ , а ако је  $m < 0$  график се транслира лево од  $y = ax^2$ .

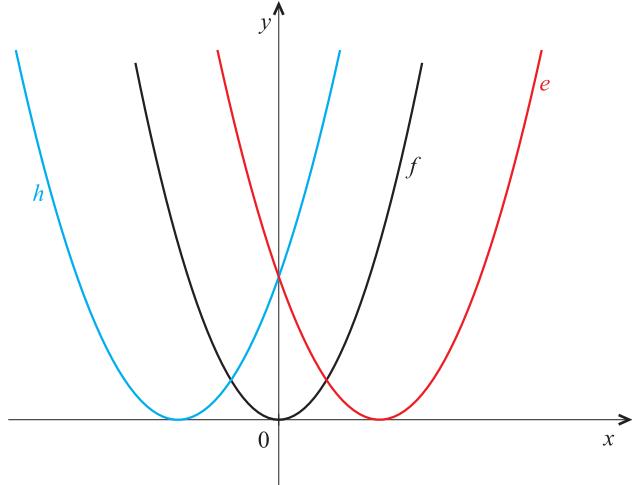
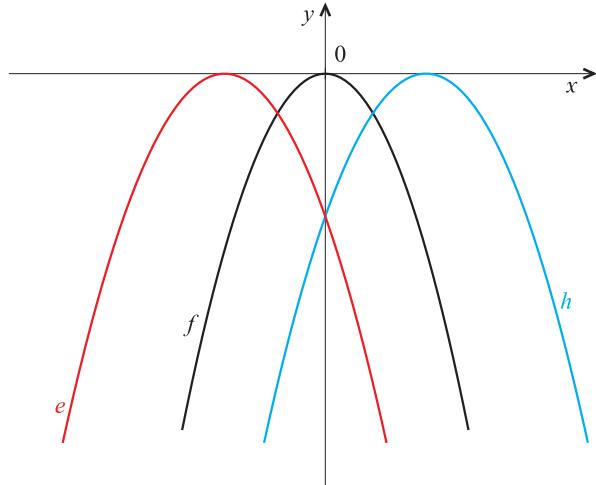


График функције  $y = a(x - m)^2, a < 0$  се добија тако што се график функције  $y = ax^2, a < 0$  транслира дуж осе  $x$  за вредност  $m$ . Ако је  $m > 0$  график се транслира десно од  $y = ax^2$ , а ако је  $m < 0$  график се транслира лево од  $y = ax^2$ .



1. Нацртати и описати функције  $f(x) = 2x^2$ ,  $f(x) = 2(x - 3)^2$ ,  $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$
2. Нацртати и описати функције  $f(x) = -2x^2$ ,  $f(x) = -2(x + 1)^2$ ,  $f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$

*Квадратна једначина и квадратна функција*

( Уколико је могуће користити ГеоГебру за приказивање графика, или поделити ученицима графике функција на наставним листићима.)

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 256

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Испитивање графика квадратне функције у зависности од коефицијената

**Тип часа:** комбиновани: обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Указивање на зависност вредности коефицијената функције и облика графика функције

**Образовни задаци:** Ученик треба да сведе запис квадратне функције на канонски облик, скицира график и запише особине функције

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Увежбавање цртања графика функције. Јачање свести о значају повезивања градива.

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинуса.

2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** квадратна функција, канонски облик

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни. Поновити:

Дефиниција: Функција  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$        $a, b, c \in R$  назива се квадратна функција.

### **Главни део часа: 35 минута**

Сваку квадратну функцију можемо довести на канонски облик  $f(x) = a(x - m)^2 + n$  где је  $m = -\frac{b}{2a}$ ,  $n = \frac{4ac - b^2}{4a}$ . График функције је парабола са отвором нагоре ( $a > 0$ ) или надоле ( $a < 0$ ).

Квадратна функција је дефинисана за сваки реалан број  $x$ .

Квадратна функција има минимум за  $a > 0$   $T_{\min}\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$  и максимум за  $a < 0$   $T_{\max}\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ . Тачку Т називамо теменом параболе.

1. Конструисати графике следећих функција

1)  $y = -2x^2 + 5x + 3$

2)  $y = (2x+3)(x-5)$

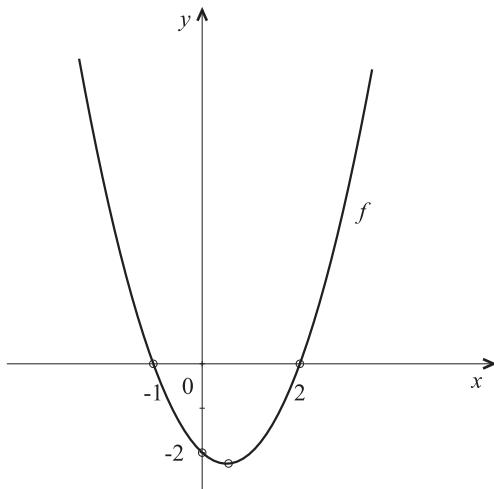
3)  $y = -x^2 - 2x + 1$

4)  $y = -2x^2 + 4x + 6$

5)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8$

(Уколико је могуће користити ГеоГебру за приказивање графика, или поделити ученицима графике функција на наставним листићима.)

Пример графика функције  $y = x^2 - x - 2$  у ГеоГебри



**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 265

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Испитивање графика квадратне функције у зависности од коефицијената

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка, рачунар, проектор

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да развије рутину и спретност у испитивању и цртању квадратне функције

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздана ученика.

**Функционални задаци:** Јачање свести о значају повезивања градива.

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинуса.

2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** квадратна функција, канонски облик

### Уводни део часа: 5 минута

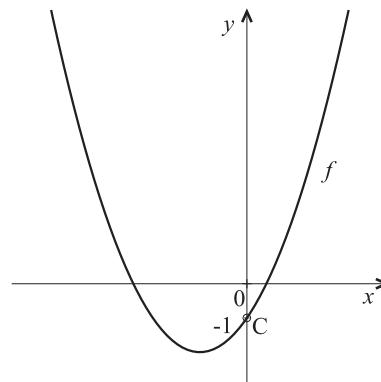
Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни. Поновити:

График квадратне функције  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$   $a, b, c \in R$  је крива која се зове парабола.

### Главни део часа: 35 минута

Ток квадратне функције ћемо испитивати у 8 тачака:

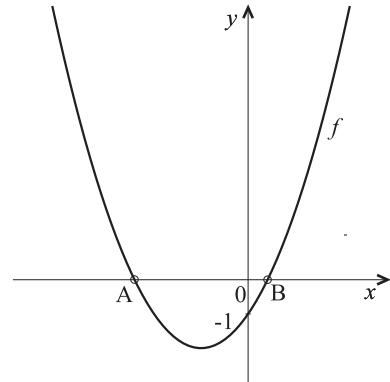
1. Област дефинисаности (домен) квадратне функције је скуп свих реалних бројева  $R$ .  
Пишемо  $D=R$ .
2. Пресек са  $y$ -осом. За  $x=0$  добијамо  $y=c$ , па је тачка



пресека графика са осом  $A(0,c)$ .

3. Нуле квадратне функције  $f(x) = ax^2 + bx + c$  су реална решења квадратне једначине  $ax^2 + bx + c = 0$  (заменимо  $y=0$  и добијемо квадратну једначину). Нуле функције су пресек графика те функције са  $x$ -осом. Нуле тражимо помоћу обрасца за решавање квадратне једначине.  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Квадратна функција има две реалне нуле ако је  $D>0$ , једну реалну нулу ако је  $D=0$  и ако је  $D<0$  квадратна функција нема реалних нула.



4. Екстремне вредности квадратне функције: Квадратна функција  $f(x) = ax^2 + bx + c$  има једну екстремну вредност  $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ .

Ако је  $a<0$  има максимум,



а ако је  $a>0$  има минимум.



5. Монотоност квадратне функције. У зависности од вредности коефицијента  $a$ , разликујемо случајеве:

$$a < 0 \quad \cup$$

$$a > 0 \quad \cup$$

$$x \in (-\infty, x_m) \quad f \downarrow$$

$$x \in (x_m, +\infty) \quad f \uparrow$$

$$x \in (-\infty, x_m) \quad f \uparrow$$

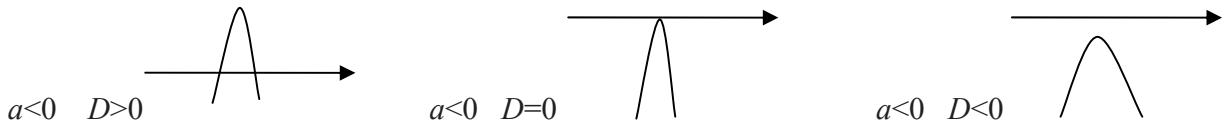
$$x \in (x_m, +\infty) \quad f \downarrow$$

6. Знак квадратне функције. У зависности од вредности дискриминанте  $D$  и коефицијента  $a$ , разликујемо случајеве:

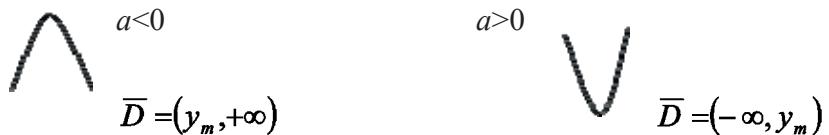
$$a > 0 \quad D > 0 \quad \cup$$

$$a > 0 \quad D = 0 \quad \cup$$

$$a > 0 \quad D < 0 \quad \cup$$



7. График квадратне функције.  
 8. Област вредности ( кодомен) квадратне функције је скуп свих вредности функције.



Примери:

- 1) Нацртати график функције  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ако је: 1)  $a > 0 \quad y \in [-2, +\infty)$       2)  $a > 0 \quad y \in [0, +\infty)$   
 3)  $a > 0 \quad y \in [3, +\infty)$
- 2) Дата је функција  $y = x^2 + mx + 4$ . У истом координатном систему нацртати дату функцију за  $m=5$ ,  $m=0$ ,  $m=4$ .

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 257, 258, 259

*Квадратна једначина и квадратна функција*

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Квадратна функција-вежбање

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да развије рутину и спретност у испитивању и цртању квадратне функције

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоузданања ученика.

**Функционални задаци:** Јачање свести о значају повезивања градива.

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинуса.

2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** график квадратне функције

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### **Главни део часа: 35 минута**

Испитати функцију и скицирати њен график

- |                                    |                         |  |
|------------------------------------|-------------------------|--|
| 1) (267. збирка)                   | ћ) $y = x^2 - 2x + 3$   | к) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$ |
| 2) (268. збирка)                   | в) $y = - x^2 - 2x $    | г) $y =  -x^2 + x  - x$                    |
| 3) (269. збирка) (додатни задатак) | а) $y = x^2 - 4 x  + 3$ | г) $y = (3 - x) x + 1 $                    |

### **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 267. е, ж, ј)

*Квадратна једначина и квадратна функција*

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Квадратна функција - вежбање

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** рад у пару

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да развије рутину и спретност у испитивању и цртању квадратне функције

**Васпитни задаци:** Развијање солидарности, комуникације и самокритичности

**Функционални задаци:** Јачање свести о значају повезивања градива.

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинуса.

2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције

**Активност ученика:** Раде у пару задатке из збирке

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** график квадратне функције

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### **Главни део часа: 35 минута**

Задаци (задаци из збирке – ученици их решавају у пару коришћењем збирке, у договору са наставником пар се оцењује, прва група задатака за оцену 2, друга група 3, трећа група 4, а четврта за 5)

1. (250.) Дата је функција  $f(x) = x^2 + 5x + c$ . Одредити  $c \in R$ , ако је:

a)  $f(0) = 2$    b)  $f(1) = 4$    v)  $f(-2) = -10$

(254. г)) Скицирати график функције  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

(267. e)) Испитати функцију и скицирати њен график  $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

2. (251) У квадратној функцији  $f(x) = ax^2 + bx + c$  одредити коефицијенте  $a, b, c$ , ако график функције пролази кроз тачке A(2, 18), B(-3, -12), C(3, 42)

- (257. в)) Одреди екстремну вредност функције  $f(x) = -x^2 - 6x - 5$
- (267. ж)) Испитати функцију и скицирати њен график  $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$
3. (253) У функцији  $f(x) = x^2 + bx + c$  одредити коефицијенте  $b, c$ , тако да она сече  $x$ -осу у тачкама  $A(2, 0), B(-3, 0)$ .
- (261) Да ли функција  $f(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$  има екстремну вредност у интервалу  $(-1, 5)$ ?
- (267. ј)) Испитати функцију и скицирати њен график  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$
4. (267. к)) Испитати функцију и скицирати њен график  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$
- (272. г)) У функцији  $f(x) = x^2 + px + q$  одредити коефицијенте  $p, q$ , тако да график функције сече  $x$ -осу у тачкама  $A(-7, 0), B(\frac{1}{2}, 0)$ .
- (275) За које вредности реалног параметра  $m$  функција  $f(x) = x^2 + m(m+1)x + 100$  додирује  $x$ -осу?

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 268. б), 269. в)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Квадратна функција - вежбање

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба да развије рутину и спретност у испитивању и цртању квадратне функције

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоузданања ученика.

**Функционални задаци:** Јачање свести о значају повезивања градива.

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинуса.

2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** график квадратне функције

**Ток првог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

- 1) У функцији  $y = x^2 + 5x + c$  одреди вредност реалног параметра  $c$  тако да важи  $f(-5) = -12$ .
- 2) Скицирати график функције  $y = ax^2 + bx + c$  ако је  $a < 0$ ,  $c < 0$ ,  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $D \neq 0$ , а затим одредити знак те функције
- 3) Скицирати график функције  $y = ax^2 + bx + c$  ако је  $a < 0$ ,  $c < 0$ ,  $x_1 + x_2 < 0$ , а затим одредити знак те функције

- 4) Скицирати график функције  $y = ax^2 + bx + c$  ако је  $a > 0$ ,  $c < 0$ ,  $x_1 + x_2 < 0$ , а затим одредити знак те функције
- 5) У квадратној функцији  $y = ax^2 + bx + c$  одреди коефицијенте  $a, b, c$  тако да график те функције пролази кроз тачке  $A(-10, -3)$ ,  $B(0, 7)$  и  $C\left(5, \frac{9}{2}\right)$ . Нацртај график функције
- 6) У квадратној једначини  $x^2 - mx + m - 1 = 0$  одреди вредност реалног параметра  $m$  тако да  $x_1^2 + x_2^2$  буде минимално.
- 7) У квадратној једначини  $6x^2 + 6(m-1)x - 5m + 2m^2 = 0$  одреди вредност реалног параметра  $m$  тако да  $x_1^3 + x_2^3$  буде максимално.
- 8) Одреди за које вредности  $x$  функција  $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$  има минимум.

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 274, 276, 280

**Ток другог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

- 1) У функцији  $y = (2k-1)x^2 + (k+2)x + k - 1$  одреди вредност реалног параметра  $k$  тако да функција буде позитивна ( $y > 0$ ) за сваки  $x \in R$ .
- 2) У функцији  $y = (k^2 + 2k - 3)x^2 - 4kx + k$  одреди вредност реалног параметра  $k$  тако да функција буде позитивна ( $y > 0$ ) за сваки  $x \in R$ .
- 3) Одреди  $a \in R$  тако да једначина  $|x^2 - 2x - 3| = a$  има максималан број решења.
- 4) Одреди  $a \in R$  тако да једначина  $|x^2 - 4x - 1| = a$  има четири различита реална решења.
- 5) Одреди  $a \in R$  тако да једначина  $|x - a| = x - x^2$  има два различита реална решења
- 6) Нађи најмању вредност израза  $E = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  ако је  $x+y=5$ .

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 279

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Квадратне неједначине

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задаци:** Ученик треба развије рутину и спретност у решавању квадратних неједначина

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздана ученика.

**Функционални задаци:** Јачање свести о значају повезивања градива.

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.1.6. Решава једноставне проблеме који се своде на линеарне неједначине и једноставне квадратне неједначине

2.МА.2.1.7. Решава квадратне и једноставне рационалне неједначине.

2.МА.3.1.5. Решава неједначине користећи основна својства елементарних функција

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** квадратне неједначине

**Ток првог часа:**

**Уводни део часа: 10 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

Приликом испитивања квадратних функција детаљно смо анализирали питање знака квадратног тринома.

Пример: Одреди знак квадратног тринома  $2x^2 + x - 3$

**Главни део часа: 30 минута**

Како добијамо квадратне неједначине?

Уопштено  $ax^2 + bx + c > 0 \quad (< 0)$        $ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\leq 0)$

Решење неједначине са једном непознатом је бројна вредност те непознате која уврштена уместо непознате у неједначину, ову преводи у тачну нумеричку неједнакост.

Реши следеће квадратне неједначине:

- 1)  $x^2 - 4x + 3 < 0$
- 2)  $-x^2 + 3x - 2 \leq 0$
- 3)  $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$
- 4)  $5(x-2)^2 > 0$
- 5)  $4x^2 + 3x - 1 < 0$
- 6)  $4(x-3)(x+2)(5-x) > 0$
- 7)  $\frac{2x-4}{3x+6} > 1$
- 8)  $\frac{x-1}{2x+1} \geq 2$

Додатни задаци

- 9)  $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
- 10)  $2x^2 - 5x + 6 > 0$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 290-292

**Ток другог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

Реши неједначине:

- 1)  $\frac{2x^2 + x - 3}{-3x^2 - 5x + 2} \geq 0$
- 2)  $\frac{-x^2 - 5x + 24}{2x^2 - x - 10} < 0$

3)  $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$

4) (292.в), збирка)  $\frac{11x - 10}{2x - 1} \geq \frac{8x}{x + 2}$

5)  $\frac{1}{x^3 + 1} > \frac{1}{x^3 - x}$

6)  $\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 1$

7) 7)  $\frac{x+2}{x-2}(2x-x^2) > \frac{x^3+8}{2x-x^2-4}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 295-298

**Ток трећег часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

1. Колику вредност треба да има  $k$  да за било које реално  $x$  важи:

a)  $x^2 - 2x + k \geq 3$       b)  $x^2 - 2x + k < 3$       v)  $(k-1)x^2 + 2kx + 3k - 2 > 0$

2. За које вредности реалног параметра  $k$  једначина  $x^2 - (k+3)x + k + 2 = 0$  има реална решења  $x_1, x_2$  која задовољавају услов  $x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 > 0$

3. Реши неједначине

1. (302.а))  $|x^2 - 5x + 5| < 1$

$$2. \quad (303.\text{г})) \quad \frac{|x-3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2$$

$$3. \quad \frac{|x^2 - x - 2| - 4}{x^2 - 2x - 3} > 1$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 293, 300-303

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Ирационалне једначине

**Тип часа:** обрада, утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање ирационалних једначина

**Образовни задаци:** Ученик треба да зна да постави услове, реши једначину и утврди решења

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоузданаја ученика.

**Функционални задаци:** Развијање навике постављања услова односно одређивања области дефинисаности

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.6. Решава проблеме који се своде на једначине у којима се појављују елементарне функције

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** ирационалне једначине

**Ток првог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Увод у тему и мотивациони разговор.

**Главни део часа: 35 минута**

Једначина у којој се непозната налази под знаком корена назива се ирационална једначина. При решавању ирационалних једначина ради се само са реалним бројевима, па прихватамо само реална решења. Приликом решавања користимо следеће еквиваленције:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \wedge f(x) = g^2(x)$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0 \wedge f(x) = g(x)$$

Примери ирационалних једначина:

$$1) \sqrt{x-1} = x$$

$$2) \sqrt{x^2 + 1} = x - 1$$

$$3) (364.\text{а}) \sqrt{x^2 + x - 3} = 3$$

$$4) (364.\text{б}), \text{збирка} \quad \sqrt{6 - x - x^2} = x + 1$$

$$5) (360.\text{г}), \text{збирка} \quad \sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{x + 1}$$

$$6) 1 - x = \sqrt{3x^2 - 7x + 3}$$

$$7) \sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7$$

$$8) \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2$$

### **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 360, 364.

### **Ток другог часа:**

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћег задатка.

### **Главни део часа: 35 минута**

Реши једначине:

$$1) \sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$$

$$2) \sqrt{x^2 + 5x + 2} = \sqrt{x^2 - 3x + 3} + 3$$

$$3) \sqrt{2x^2 + 3x + 2} - \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 1$$

(смена  $t = 2x^2 + 3x$ )

(овако квадрирати)

$$4) 2\sqrt{x^2 - 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 9} = 1$$

(смена  $t = x^2 - 2x$ )

$$5) \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x+3}$$

$$6) \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{4x+5}$$

### **Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 362

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Припрема за други писмени задатак

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Провера усвојености градива и примене знања у решавању задатака

**Образовни задаци:** Ученик треба да зна да постави и реши задатак

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздана ученика.

**Функционални задаци:** Развијање способности за тачно самостално решавање задатака

**Стандард уз наставну јединицу:**

сви стандарди који су обухватали тему квадратна једначина и квадратна функција

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### **Главни део часа: 35 минута**

- Одрedi параметар  $m$  тако да решења једначине  $x^2 - (7m+2)x + 8 = 0$  испуњавају услов

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}x_1 \cdot x_2 = 4$$

- У квадратној једначини  $x^2 - (m-3)x + m+3 = 0$  одреди вредност реалног параметра  $m$  тако да  $x_1^2 + x_2^2$  буде минимално.

- Нађи сва реална решења једначине:  $(x^2 + 2x - 2)^2 - (x-1)(x+3) = 31$

$$x^2y + xy^2 = 30$$

- Одрedi скуп решења система:  $xy + x + y = 11$

5. У функцији  $y = (3m^2 + 5m - 2)x^2 + 2(m+2)x + 1$  одреди вредност реалног параметра  $m$  тако да функција буде негативна за сваки  $x \in R$ .

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак: Поделити на наставним листићима:

- 1) Одреди параметар  $m$  тако да решења једначине  $x^2 - (4m-11)x + 12 = 0$  испуњавају услов:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{6} x_1 \cdot x_2 = 12$$

- 2) У квадратној једначини  $x^2 - (m+1)x + 2m - 7 = 0$  одреди вредност реалног параметра  $m$  тако да  $x_1^2 + x_2^2$  буде минимално

$$(x-5)^2 + \frac{1}{(x-5)^2} = \frac{49}{4}$$

- 3) Нађи сва реална решења једначине:

$$y^2 + x^2 + xy = 13$$

- 4) Одреди скуп решења система:

$$x + y + xy = 7$$

- 5) У функцији  $y = (-3m^2 + m + 2)x^2 + 2(3m + 2)x + 1$  одреди вредност реалног параметра  $m$  тако да функција буде позитивна за сваки  $x \in R$ .

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Ирационалне неједначине

**Тип часа:** обрада, утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање ирационалних неједначина

**Образовни задаци:** Ученик треба да зна да постави услове, реши једначину и утврди скуп решења неједначине

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоузданаја ученика.

**Функционални задаци:** Развијање навике постављања услова односно одређивања области дефинисаности

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.5. Решава неједначине користећи основна својства елементарних функција

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** ирационалне неједначине

**Ток првог часа:**

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

Поновити шта су ирационалне једначине и на основу дефиниције линеарних и квадратних неједначина навести ученике да сами дефинишу појам ирационалних неједначина.

### **Главни део часа: 35 минута**

Дефиниција1: Неједначина облика  $\sqrt{a(x)} < b(x)$  еквивалентна је систему неједначина:  $a(x) < b^2(x) \wedge a(x) \geq 0 \wedge b(x) > 0$ .

Дефиниција2: Неједначина облика  $\sqrt{a(x)} > b(x)$  еквивалентна је дисјункцији система неједначина:  $(a(x) > b^2(x) \wedge b(x) \geq 0) \vee (a(x) \geq 0 \wedge b(x) < 0)$

1. (370.а), збирка)  $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 3$
2. (370.г), збирка)  $\sqrt{(x - 3)(2 - x)} < 3 + 2x$
3. (371.б), збирка)  $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$

4. (371.д), збирка)  $\sqrt{x^2 - x - 12} > x - 2$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 370, 371 (преостали задаци)

**Ток другог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни. Поновити како се решавају ирационалне неједначине.

**Главни део часа: 35 минута**

На часу користити збирку задатака, ученици решавају задатке из збирке (од 372 до 374), наставник им помаже на примерима који им задају проблема, пратећи рад ученика, у договору са ученицима вреднује њихов напредак.

Задаци: Решити неједначине:

1. (372, збирка) а)  $\sqrt{x^2 - x - 2} > 2$    б)  $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -2$   
в)  $\sqrt{\frac{x^2-16}{x-1}} \leq \frac{3}{2}$    г)  $\sqrt{\frac{x^2-4x+7}{x-2}} < 2$
2. (373, збирка) а)  $\sqrt{x+7} > \frac{|x-5|}{4}$    б)  $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$   
в)  $\sqrt{x+2} < 4-x$    г)  $\sqrt{\frac{3x+1}{x^2+x-2}} < 1$

Додатни задатак

3. (374, збирка) а)  $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$    б)  $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} < 4$   
в)  $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$    г)  $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x+1}$   
д)  $\sqrt{7x-13} > \sqrt{3x-19} + \sqrt{5x-27}$    ђ)  $\sqrt{3x-5} + \sqrt{x-2} > \sqrt{4x-3}$

Додатни задатак (за напредније ученике):

4. Решити неједначину: (462. а), збирка)  $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 372-374 (задаци које ученици не стигну да реше на часу).

**Ток трећег часа:**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни. Поновити како се решавају ирационалне једначине и неједначине.

**Главни део часа: 35 минута**

На часу користити збирку задатака, ученици решавају задатке из збирке (од 375 до 379), наставник им помаже на примерима који им задају проблема, пратећи рад ученика, у договору са ученицима вреднује њихов напредак.

Задаци

1. (375, збирка)

$$\text{а)} \sqrt{x^2 + 5x + 5} > 1$$

$$\text{б)} \sqrt{x^2 - x - 1} < 1$$

$$\text{в)} \sqrt{3x^2 - 5x - 3} > \sqrt{2x + 3}$$

$$\text{г)} \sqrt{3x^2 - 2x - 1} \geq 2x - 2$$

$$\text{д)} \sqrt{8-x} + \sqrt{x-3} > 3$$

$$\text{ђ)} x\sqrt{10-x^2} > x^2 - 6$$

$$\text{е)} x\sqrt{3x^2 + 5x - 6} < x^2 + 2x$$

$$\text{ж)} \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$$

Додатни задаци

2. (376, збирка) Решити једначину:  $\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}} = 4$

3. (377, збирка) Наћи сва решења једначине:  $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

4. (378, збирка) Решити једначине:

$$\text{а)} \sqrt{x} + \sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1$$

$$\text{б)} \sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} - 2$$

$$\text{в)} \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 376-378 (задаци које ученици не стигну да реше на часу).

*Квадратна једначина и квадратна функција*

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Систематизација градива

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Провера усвојености градива и примене знања у решавању задатака

**Образовни задаци:** Ученик треба да зна да постави и реши задатак

**Васпитни задаци:** Развијање концентрације, прецизности, систематичности и тачности у раду. Развијање самопоуздања ученика.

**Функционални задаци:** Развијање способности за тачно самостално решавање задатака

**Стандард уз наставну јединицу:**

сви стандарди који су обухватали тему квадратна једначина и квадратна функција

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

### **Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћих задатака и решавање оних који нису били јасни.

### **Главни део часа: 35 минута**

1. (401, збирка) Одреди параметар  $k$  тако да корени једначине  $4x^2 - 4kx + k^2 - 4 = 0$  припадају интервалу  $(-3,4)$ .
2. (386, збирка) Дата је једначина  $x^2 - 2(a+1)x + 3a + 2 = 0$ , где је  $a$  реалан параметар.
  - 1) За коју вредност параметра  $a$  су решења реална?
  - 2) Наћи везу између решења  $x_1$  и  $x_2$  које су независна од параметра  $a$ ?
  - 3) На основу те везе одредити решења дате једначине тако да она буду једнака.
  - 4) Одредити вредност параметра  $a$  тако да збир решења дате једначине буде једнак збиру њихових кубова.
3. (Пријемни испит, МАТФ, 2013)

Одреди скуп решења система (користити формулу за збир кубова):

$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\x^3 + y^3 &= -1\end{aligned}$$

(Пријемни испит, ФОН, 2013)

Нека су  $x_1$  и  $x_2$  решења једначине  $x^2 + 3x + m = 0$ . Вредност реалног параметра  $m$  за коју израз  $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$  достиже максималну вредност припада интервалу: а) [2,3) б) [1,2) в) [4,5) г) [3,4) д) [0,1)

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак: Они задаци који преостану од предложених за Главни део часа

### 3. Експоненцијална и логаритамска функција

**Експоненцијална и логаритамска функција – препоручени садржаји**

Експоненцијална функција и њено испитивање (својства, график).

Једноставније експоненцијалне једначине и неједначине.

Појам инверзне функције. Појам логаритма, основна својства. Логаритамска функција и њен график.

Основна правила логаритмовања, антилогаритмовање. Декадни логаритми. Примена логаритама у решавању разних задатака (уз употребу рачунара).

Једноставније логаритамске једначине и неједначине.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Експоненцијална функција.

**Тип часа:** обрада новог градива

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, рачунар, проектор

**Циљ часа:** Испитивање особина експоненцијалне функције

**Образовни задатак:** Научити ученике општи облик експоненцијелне функције; особине експоненцијалне функције у зависности од параметара

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** развијање способности за уопштавање и повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинуса.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** експоненцијална функција

### Уводни део часа: 10 минута

Наставник поставља питања и понављањем особина степена уводи ученике у тему.  
Применом степена чији је изложилац рационалан број, можемо увести нову класу функција.

Ако фиксирамо базу  $a \in R^+ = (0, +\infty)$ ,  $a \neq 1$ , тада можемо дефинисати функцију  $f : R \rightarrow R^+$   $f(x) = a^x$  чије се вредности рачунају по правилима степеновања.

Експоненцијална функција је једна од најважнијих функција у математици.

### Главни део часа: 30 минута

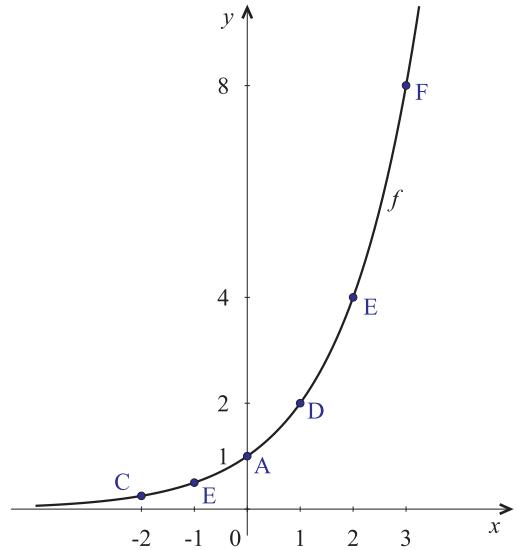
**Пример 1.** Посматрајмо функцију  $f(x) = 2^x$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2^x$	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

Наведене тачке унесемо у координатни систем:

Користећи наведени график анализирамо особине функције

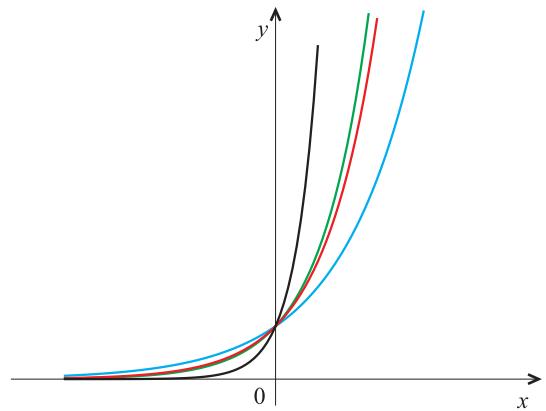
- Област дефинисаности (домен) функције је скуп  $R$
- График функције је изнад  $x$ -осе односно  $2^x > 0, \forall x \in R$
- Ако график посматрамо са лева на десно крива  $f(x) = 2^x$  расте, односно кажемо функција је растућа на скупу  $R$
- Функција пролази кроз тачку  $A(0,1)$ , односно за  $x > 0$  важи  $2^x > 1$ , а за  $x < 0$  важи  $0 < 2^x < 1$
- Произвољна права која је паралелна са осом  $x$  и налази се изнад осе  $x$ , сече график наведене функције тачно у једној тачки што значи да је функција "1-1" пресликавање скупа  $R$  у скуп  $R^+$
- Област вредности функције (кодомен) је скуп  $R^+$



Сличне особине имају функције:

$$f(x) = 2^x, f(x) = 3^x, f(x) = e^x, f(x) = 10^x, \dots$$

(наведене функције се приказују уз помоћ презентације)

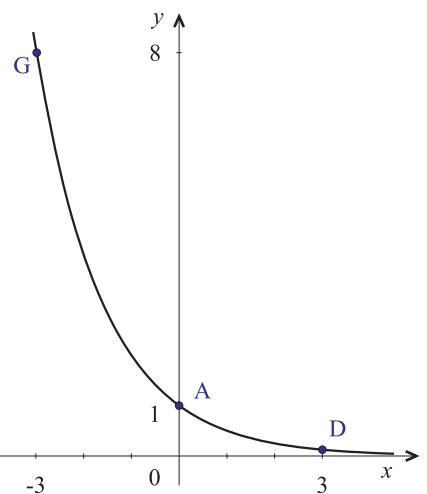


Уопштено за  $f(x) = a^x$ ,  $a > 1$  важе наведене особине.

Посебно често се користе функције  $10^x$  и  $e^x$  при чему је  $e$  приближно једнак 2,71828183, што је заправо Неперова константа.

**Пример 2.** Посматрајмо функцију  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2^x$	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8



Наведене тачке унесемо у координатни систем:

Користећи наведени график анализирамо особине функције

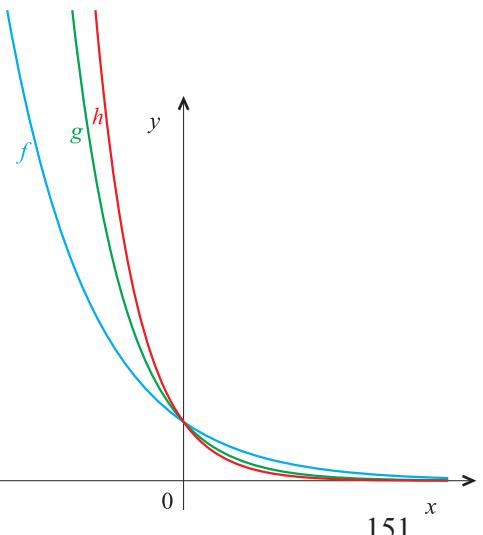
- Област дефинисаности (домен) функције је скуп  $R$
- График функције је изнад  $x$ -осе односно  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ ,  $\forall x \in R$
- Ако график посматрамо са лева на десно крива  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  опада, односно кажемо функција је опадајућа на скупу  $R$
- Функција пролази кроз тачку  $A(0,1)$ , односно за  $x > 0$  важи  $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$ , а за  $x < 0$  важи  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$
- Произвољна права која је паралелна са осом  $x$  и налази се изнад осе  $x$ , сече график наведене функције тачно у једној тачки што значи да је функција "1-1" пресликавање скупа  $R$  у скуп  $R^+$
- Област вредности функције (кодомен) је скуп  $R^+$

Сличне особине имају функције:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x, \quad \dots$$

(наведене функције се приказују уз помоћ презентације)

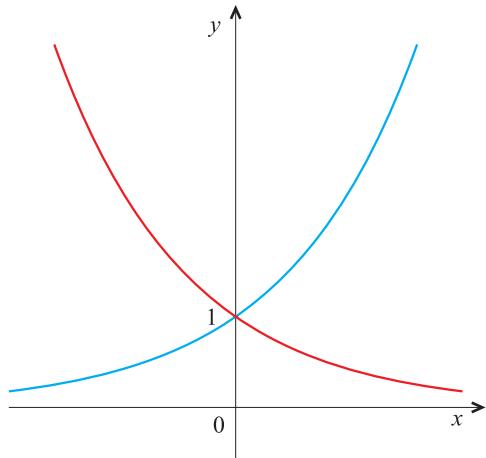
Уопштено за  $f(x) = a^x$ ,  $0 < a < 1$  важе наведене особине.



За функцију  $f(x) = a^x$  кажемо да је строго растућа ако је  $a > 1$ , односно строго опадајућа ако је  $a < 1$ .

Функција  $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$  је симетрична функцији  $f(x) = a^x$  у односу на  $y$ -осу.

**Пример 3.** Нацртајмо функције  $y = 2^x$  и  $y = 2^{-x}$  на истом графику  
(наведене функције се приказују уз помоћ презентације)



### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 474

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Експоненцијална функција.

**Тип часа:** обрада новог градива

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Цртање графика експоненцијалне функције

**Образовни задатак:** Научити ученике особинама експоненцијалне функције

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање вештина цртања графика експоненцијалне функције

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинуса.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** експоненцијална функција

### Уводни део часа: 5 минута

Анализа домаћег задатка

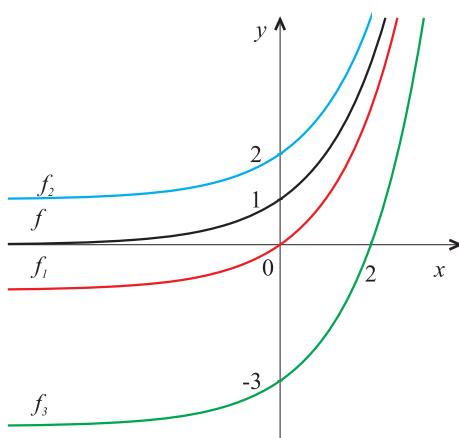
### Главни део часа: 35 минута

- Користећи график функције  $f(x) = 2^x$ , нацртати графике и испитати особине следећих функција

1)  $f_1(x) = 2^x + 1$  (476. a)

2)  $f_2(x) = 2^x - 1$

3)  $f_3(x) = 2^x - 4$

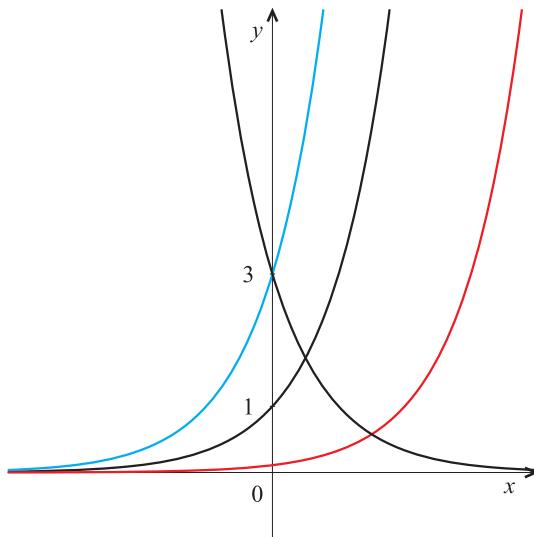


Користећи график функције  $f(x) = 3^x$ ,  
нацртати графике и испитати особине  
следећих функција

1)  $f_1(x) = 3^{x+1}$

2)  $f_2(x) = 3^{x-2}$

3)  $f_3(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$



2. Скицирати графике следећих функција и испитати њихове особине:

a)  $y = 2 \cdot 3^{-x}$ ,  $x > -2$

б)  $y = 3^x - 9$ ,  $0 \leq x \leq 2$

Додатни задатак

3. Користећи особине експоненцијалне функције, упореди степене

1)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}}$  и  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$       2)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$  и  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$       3)  $1,1^{\sqrt{2}}$  и  $1,1^{1,4}$       4)  $1,2^{-2}$  и  $1,2^{-\sqrt{3}}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 476

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Експоненцијална функција.

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, калкулатор, проектор, рачунар

**Циљ часа:** Примена експоненцијалних функција

**Образовни задатак:** Научити ученике особинама експоненцијалне функције

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање способности повезивања градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинуса.

2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).

2.МА.1.3.4. У функцијама које су представљене графички или табеларно, анализира, примењује и приближно израчунава брзину промене помоћу прираштаја.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** експоненцијална функција

### Уводни део часа: 5 минута

Анализа домаћег задатка

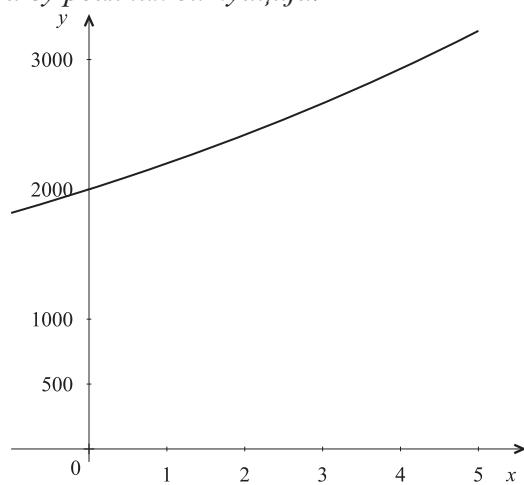
Експоненцијалне функције имају примену у описивању реалних ситуација.

### Главни део часа: 35 минута

- Неко уложи капитал  $K=2000$  на штедњу уз  $10\%$  годишње камате. Коликим износом располаже након  $n$  година ако је обрачун камате годишњи, сложен и декурзиван?

$$\text{Решење: } K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 2000 \cdot (1,1)^n$$

$n$	0	1	2	3	4	5
$K_n$	2000	2200	2420	2662	2928	3221

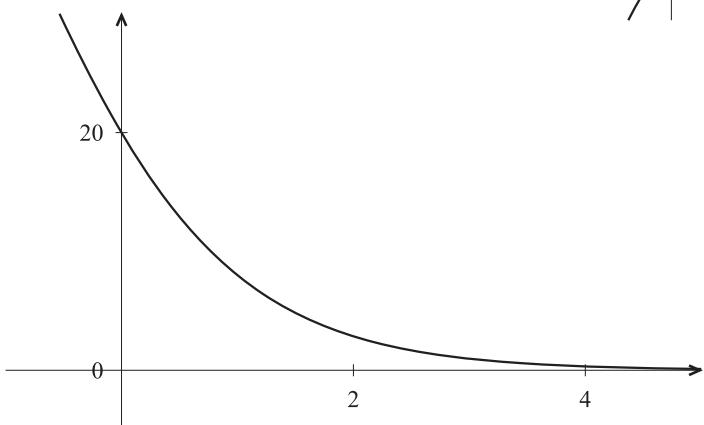
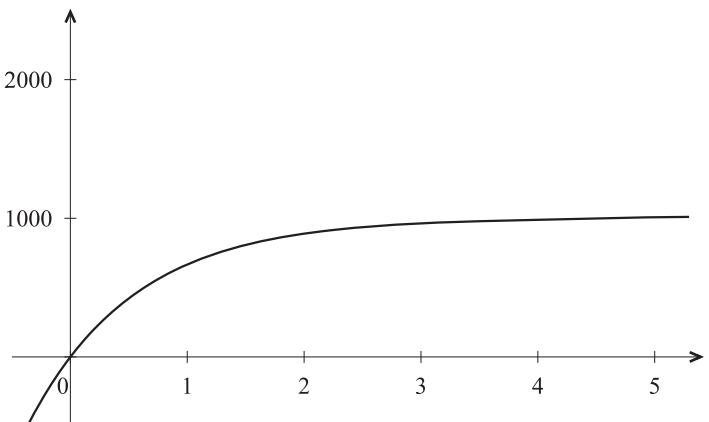


2. Продаја неког новог производа у почетку брзо расте, а затим се тржиште полако засићује. На пример, продаја новог типа отварача за конзерве је описана функцијом  $f(x) = 1000(1 - 3^{-x})$ , при чему  $x$  означава број година протеклих од појаве отварача на тржишту. Израчунати количину продатих отварача након прве, друге и треће године.

$$f(1) = 1000 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 667$$

Решење:  $f(2) = 1000 \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 889$

$$f(3) = 1000 \left(1 - \frac{1}{27}\right) = 963$$



3. Једна од функција која описује укупан број учењем запамћених чињеница у зависности од времена протеклог од престанка учења дата је формулом:  $f(t) = y \frac{1}{1 + 3^{t+1}}$ . Овде је  $t$  означен број месеци протеклих од престанка учења, а  $y$  број чињеница познатих ученику у тренутку престанка учења. График наведене функције представља криву заборављања. Ако узмемо да смо на једном предавању чули 80 нових чињеница, односно да је  $y=80$ , већ у датом тренутку смо у стању да запамтимо само 20 чињеница, након 1 месеца број чињеница којих се сећамо без понављања је 10, ...

4. Број становника у Србији 2011. године износио је 7120666. Ако је стопа раста становника 0,739%, каква је процена о броју становника 2020. године?

$$f(x) = 7120666 \cdot (1 - 0,00739)^9 = 6660831$$

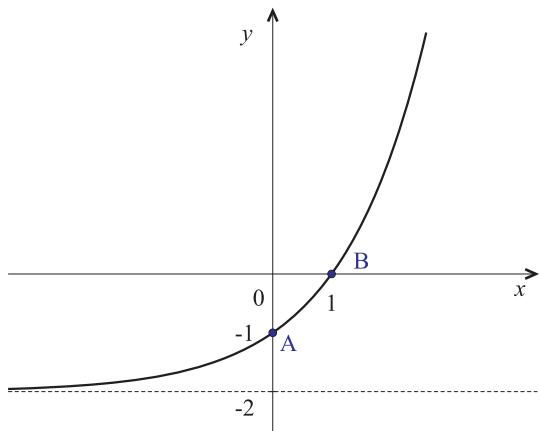
Напиши функцију у облику  $f(x) = a^x + b$  ако је њен график дат на слици десно.

Решење

$$x = 0 \quad f(x) = -1 \quad a^0 + b = -1 \quad b = -2$$

$$x = 1 \quad f(x) = 0 \quad a^1 - 2 = 0 \quad a = 2$$

$$f(x) = 2^x - 2$$



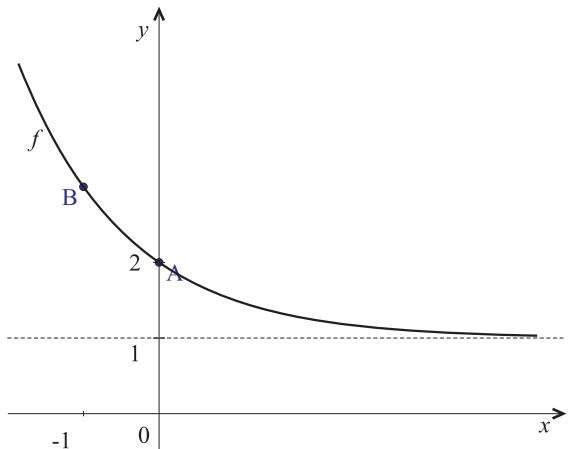
5. Напиши функцију у облику  $f(x) = a^x + b$  ако је њен график дат на слици

Решење

$$x = 0 \quad f(x) = 2 \quad a^0 + b = 2 \quad b = 1$$

$$x = -1 \quad f(x) = 3 \quad a^{-1} + 1 = 3 \quad a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$$



**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 475

*Експоненцијална и логаритамска функција*

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Експоненцијална једначина.

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање експоненцијалне једначине

**Образовни задатак:** Научити ученике различите начине за решавање експоненцијалних једначина

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.6. Решава проблеме који се своде на једначине у којима се појављују елементарне функције.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** експоненцијална једначина

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка.

Експоненцијалне једначине су оне једначине код којих се непозната налази у изложиоцу степена. Приликом решавања експоненцијалних једначина користимо

$$\text{за } a > 0 \text{ и } a \neq 1 \text{ важи } a^x = a^y \text{ ако } x = y$$

### Главни део часа: 35 минута

1) Реши једначине:

$$1) 2^x - 16 = 0 \quad [x = 4]$$

$$2) 16^{\frac{1}{x}} = 4 \quad [x = -2]$$

$$3) \left(\frac{1}{4}\right)^x = 64 \quad [x = -3]$$

$$4) 4^{-x} = \sqrt[3]{2} \quad [x = -\frac{1}{6}]$$

$$5) 2^{3x} = \frac{2^{0,5}}{4} \quad [x = -\frac{1}{2}]$$

$$6) \sqrt{a} = \frac{a^{\frac{3}{x}}}{a^x} \quad [a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3-x}{x}}, \quad \frac{1}{2} = \frac{3-x^2}{x}, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{3}{2}]$$

$$8) 2^{16^x} = 16^{2^x} \quad [x = \frac{2}{3}]$$

2) Реши једначине:

$$1) 4^x \cdot 5^{x-2} = 320 \quad [x = 3, 320 \text{ раставити на чиниоце}]$$

$$2) 2^x \cdot 3^{2x-5} \cdot 7^{x-3} = 3024 \quad [x = 4, \text{ као и претходни}]$$

$$3) 3^x \cdot 7^{2-x} = 21 \quad [x = 1]$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 479, 480, 481

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Експоненцијална једначина.

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање експоненцијалне једначине

**Образовни задатак:** Научити ученике различите начине за решавање експоненцијалних једначина

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.6. Решава проблеме који се своде на једначине у којима се појављују елементарне функције.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** експоненцијална једначина

### Ток првог часа

#### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

#### Главни део часа: 35 минута

1) Реши једначине:

$$1) 8^x = 7^{x-1} + 7^x \quad [x = 1]$$

$$2) 5^x + 5^{x-1} = 7^x - 7^{x-1} \quad [x = 1]$$

$$3) 2^{2x} + 4^{x-1} + 4 \cdot 2^{2x} = 7^x - \frac{7^x}{49} \quad [x = 3]$$

2) Реши једначине:

$$1) 4^x + 2 \cdot 2^x - 8 = 0 \quad \text{Решење: смена } t = 2^x, \quad t^2 + 2t - 8 = 0, \quad t = 2, \quad x = 1$$

2)  $25^x = 30 \cdot 5^x - 125$  [  $x_1 = 1, x_2 = 2$  ]

3)  $49^x - 6 \cdot 7^{x+1} = 343$  [  $x = 2$  ]

Додатни задаци

**3)** Реши једначине:

1)  $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$  Упутство: Поделити са  $16^x$ , решење  $x_1 = 1, x_2 = 2$

2)  $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 482, 485, 486.

### Ток другог часа

#### Уводни део часа 5 минута:

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

#### Главни део часа: 35 минута

1. Реши једначине:

1)  $\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} \cdot \frac{2}{3}$  [  $x = 1$  ]

2)  $2 \cdot \left( \left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$  [Упутство, смена,  $\sqrt{x} = t$ , решење  $x = 9$  ]

2. Реши једначине:

1)  $9^x - 2^{\frac{x+1}{2}} = 2^{\frac{x+7}{2}} - 3^{2x-1}$  [  $x = \frac{3}{2}$  ]

2)  $5^{\frac{2x+4}{5}} - 4^{\frac{2x-3}{3}} = 5^{\frac{2x-1}{5}} + 4^{\frac{2x}{3}}$

3. (ФОН, пријемни испит 2013.)

Одреди скуп реалних решења једначине  $4^x - 7 \cdot 2^{\frac{x-3}{2}} = 2^{-x}$

4. Реши следећу једначину: а)  $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$

б)  $5^x - 4 = 5^{\frac{x-1}{2}}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 484

**Ток трећег часа**

**Уводни део часа 5 минута:**

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

1. Реши једначине:

а)  $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 34$

Решење: Уводимо смену  $t = \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x$ , користимо  $3-2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ , и добијамо

квадратну једначину  $t + \frac{1}{t} = 34$  која има решења  $t = 17 + 12\sqrt{2}$ , враћањем смене добијамо решење  $x = 4$

б)  $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$  (Решење је  $x = 2$ )

2. Решити једначине графичком методом:

$$2^x = 4x \quad 2^{x+1} - x^2 = 0 \quad 3^{-x} = 5x + 19$$

3. Дата је једначина  $2^x - 5 + \frac{x}{2} = 0$ . Дату једначину решити графички, а затим помоћу

графика наћи приближну вредност израза  $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}$ .

4. Дата је једначина  $3^x - 8 - \frac{x}{2} = 0$ . Дату једначину решити графички, а затим помоћу

графика наћи приближну вредност израза  $\sqrt[4]{3^3}$ .

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 483

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Експоненцијална једначина.

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** рад у групи

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** наставни листићи, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање експоненцијалне једначине

**Образовни задатак:** Научити ученике различите начине за решавање експоненцијалних једначина

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, толеранције и комуникације

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива и сарадњу

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.6. Решава проблеме који се своде на једначине у којима се појављују елементарне функције.

**Активност наставника:** Врши поделу ученика на хетерогене групе према унапред утврђеном сценарију, врши поделу наставних листића и у последњем делу часа кроз презентацију врши анализу резултата рада по групама

**Активност ученика:** Учествују у раду групе, активно дискутују задатке

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** експоненцијална једначина

### Уводни део часа 5 минута:

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

Подела ученика на групе од 4-5 ученика и подела наставних листића са задацима

### Главни део часа: 35 минута

Рад у групама траје 25 минута

1. Реши једначине:
  - a)  $2^{\frac{x+1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 1 \quad [x_1 = -1, x_2 = 1]$
  - b)  $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}} = 12 \quad [x = 4]$
  - c)  $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} = 34 \cdot 15^{2x-x^2}$

2. Решити једначину графичком методом:  $4^{x-3} = 3x + 1$

3. Решити једначину  $(x-3)^{x^2-x} = (x-3)^2$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 487

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Експоненцијална неједначина.

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање експоненцијалне неједначине

**Образовни задатак:** Научити ученике различите начине за решавање експоненцијалних неједначина

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.5. Решава неједначине користећи основна својства елементарних функција.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** експоненцијална неједначина

### Уводни део часа: 10 минута

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

Приликом решавања експоненцијалних неједначина осим својства операција са

$$a^x < a^y \quad \text{акко} \quad x < y \quad (a > 1)$$

степенима користимо:

$$a^x < a^y \quad \text{акко} \quad x > y \quad (0 < a < 1)$$

### Главни део часа: 30 минута

Реши неједначине:

$$1) 3^{x+2} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{x}} \quad \text{Решење } 3^{x+2} \leq 3^{\frac{-2}{x}} \quad \text{следи } x^2 + 2x + 3 \leq 0, \quad \text{тј. } x \in [-1,3]$$

$$2) \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x^2-4x}{x^2}} \leq 1 \quad [x \in (0,4)]$$

$$3) (1,75)^{1-x} \leq \left(\frac{16}{49}\right)^{2(1+\sqrt{x})} \quad [x \in [1,9]]$$

$$4) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2x}} > \frac{1}{81}$$

$$5) 0,2^{9x^2-2x-2} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3}$$

Додатни задаци

$$6) 0,4^{\frac{3x-1}{x-2}} > 0,4^{-2}$$

$$7) \text{(Пријемни испит, ФОН 2015.) } (0,5)^{\frac{2x}{1-x}} \geq \sqrt{(0,25)^{x-6}}, \quad x \neq 1 \quad [x \in [-1,1] \cup (1,6)]$$

**Завршни део часа: 5 мин**

Домаћи задатак из збирке: 490

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Експоненцијална неједначина.

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање експоненцијалне неједначине

**Образовни задатак:** Научити ученике различите начине за решавање експоненцијалних неједначина

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.5. Решава неједначине користећи основна својства елементарних функција.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** експоненцијална неједначина

### Уводни део часа: 10 минута

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

### Главни део часа: 30 минута

- Реши неједначине:  
1)  $(491.\text{i})) \ 9 \cdot 16^x + 4 \cdot 81^x < 13 \cdot 36^z$   
2)  $5^x - 3^{x+1} > 2 \cdot (5^{x-1} - 3^{x-2})$   
3)  $(\sqrt{5} + 2)^x + (\sqrt{5} - 2)^x \leq 2\sqrt{5}$

- Решити неједначине графичком методом:  
1)  $2^{x+2} \leq 3x + 5$   
2)  $3^x \geq x + 3$   
3)  $(0,2)^{\frac{x-4}{2x+1}} \leq 5^x$

Додатни задаци

- (488.a), збирка)  
Реши систем једначина  $4 \cdot 4^x = 8^y, 2 \cdot 2^y = 2^x$

4. (489.г), збирка)

Реши систем једначина  $2^x + 2^y = 12, x + y = 5$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 491, 488, 489

Припрема за контролни задатак

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Инверзна функција

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање појма инверзне функције

**Образовни задатак:** Поновити појам бијекције и услов за постојање инверзне функције

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Уочавање симетрије графика међусобно инверзних функција у односу на праву

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.3.2. Разуме појам, израчунава вредност, користи и скицира график линеарне, квадратне, степене, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција синуса и косинус

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** инверзна функција

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка.

Поновити особине "1-1" и "на" за функцију и како на графику функције проверавамо наведене особине.

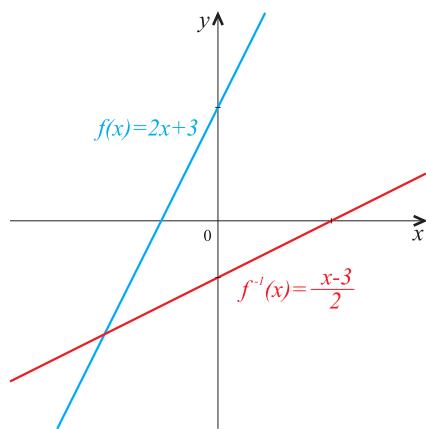
### Главни део часа: 30 минута

Нека је дата произвољна функција  $f : A \rightarrow B$  и нека наведена функција има особине "1-1" и "на".

Ако је за  $x \in A$ ,  $y = f(x)$ , онда је за свако  $y \in B$  одређено тачно једно  $x \in A$ , тако да је  $y = f(x)$ , па имамо нову функцију дефинисану на скупу  $B$ . Наведену функцију називамо инверзном функцијом за  $f$  и означавамо са  $f^{-1}$ ,  $f^{-1} : B \rightarrow A$  и важи  $f^{-1}(y) = x$ . Графици функције и њене инверзне функције су симетрични у односу на праву  $y=x$ .

**Пример 1.** За функцију  $f(x)=2x+3$  инверзна функција је  $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$

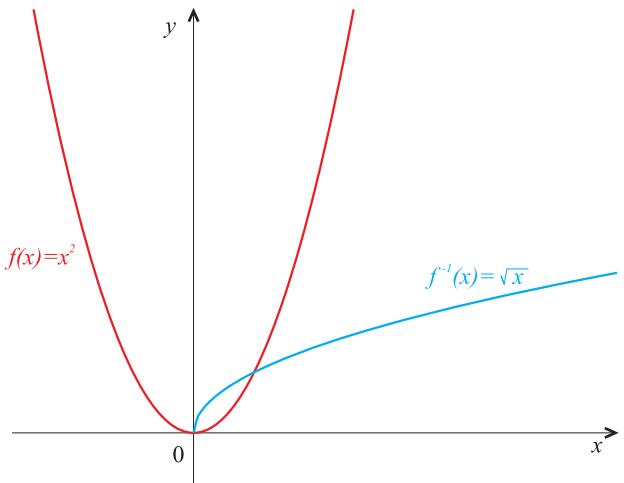
Уведимо смену  $2x+3=t$ , решавањем по  $t$  добијамо  $t=\frac{x-3}{2}$ , а враћањем смене, следи:  
 $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$ .



**Пример 2.** За функцију  $f(x)=x^2$  инверзна функција је  $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

Уведимо смену  $x^2=t$ , решавањем по  $t$  добијамо  $t=\sqrt{x}$ , а враћањем смене, следи:  
 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ .

Напомена: Обратити пажњу на област дефинисаности инверзне функције, као и њене особине.



Задаци:

1. Нађи инверзну функцију за функцију:  $f(x)=3x+5$ .
2. Нађи инверзну функцију за функцију:  $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$ .
3. Нађи инверзну функцију за функцију:  $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ .
4. Нађи инверзну функцију за функцију:  $f(x)=x^2-4$ .

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак:

1. Нађи инверзну функцију за функцију:  $f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$ .
2. Нађи инверзну функцију за функцију:  $f(x)=x^2-9$ .

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Појам логаритма и основна својства .

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање појма логаритма

**Образовни задатак:** Научити ученике појам логаритма и дефиницију

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.6. Решава проблеме који се своде на једначине у којима се појављују елементарне функције

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** логаритам, база, нумерус

### Уводни део часа: 10 минута

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

Увод у тему и мотивациони разговор (ученицима се сугерише да на

<https://sr.wikipedia.org/sr> погледају текст о настанку логаритма)

*Михаел Стифел објављено Аритхметика Интегра у Нирнбергу у 1544, која садржи његова открића логаритама. Метода логаритама се јавно излаже 1614 године у књизи под насловом Мирифици Логаритхморум Канонис ДесКриптио, од Џона Напера и Барон од Меркхистона у Шкотској.*

*Употреба логаритма је допринела напретку науке, посебно астрономије, чинећи неке тешке прорачуне могућим. Пре појаве калкулатора и компјутера, они су се користили у извиђању, навигацији и другим гранама практичне математике.*

*На почетку, Непер логаритме и зове "вештачким бројевима" и антилогаритме "природним бројевима". Касније, Непер је формирао реч логаритам са значењем однос бројева: λόγος (логос) и ἀριθμός (аритхмос) број.*

*До 20. века табеле заједнички логаритми у приручнику Абрамовића и Стегуна.*

*Пре појаве рачунара и калкулатора, коришћене су таблице логаритама, које су морале бити креиране ручно. Године 1617, Хенри Бригс објавио је прве рате своје табеле заједничких логаритама које садрже логаритаме целих бројева до 1000 до осам децималних места. Затим је уследила, 1624, његова Аритметикца Логаритмика, логаритми свих целих бројева од 1 до 20.000 и од 90.000 до 100.000 до четрнаест децималних места, заједно са уводом у коме су теорија и употреба логаритама у*

*потпуности развијени. Интервал од 20.000 до 90.000 је попунио Адријан Влацк, Холандски математичар.*

*Поред поменуте табеле, велика колекција под називом Табеле ди катастар, био је изграђен под руководством Гаспара де Пронија., под покровитељством Француске владе од 1790. Овај рад, у коме се налазе логаритми свих бројева до 100.000 на деветнаест места, као и бројеви између 100.000 и 200.000 на двадесет четири места, постоји само у рукопису, "у седамнаест огромних фолија," на опсерваторију у Паризу. Године 1792 уређене су "целе калкулације, које ће обезбедити већу прецизност.*

### Главни део часа: 30 минута

Логаритми су корисни у решавању једначина где је непознат експонент.

$$c = \log_a b$$

$c$  је логаритам броја  $b$  за основу  $a$  ако је  $a^c = b$  при чему је број  $b$  нумерус, а број  $a$  база логаритма и  $a \in R^+ \setminus \{1\}$ ,  $b \in R^+$ .

**Примери.**  $\log_{10} 100 = 2$ ,  $10^2 = 100$

$$\log_2 256 = 8$$
,  $2^8 = 256$

$$\log_3 \frac{1}{27} = -3$$
,  $3^{-3} = \frac{1}{27}$

ОСОБИНЕ ЛОГАРИТАМА:  $a \in R^+ \setminus \{1\}$ ,  $b \in R^+$

1.  $a^{\log_a b} = b$
2.  $\log_a a^c = c$
3.  $\log_a 1 = 0$
4.  $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$
5.  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
6.  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
7.  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
8.  $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$

$$9. \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

**Примери:** Израчунати:

$$1) \log_2 \frac{1}{128} = \log_2 2^{-7} = -7$$

$$2) \log_{\sqrt{3}} 81 = \frac{1}{2} \log_3 3^4 = 2$$

$$3) \log_a \sqrt[5]{a^2} = \log_a a^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$$

$$4) 2^{\log 512} = 512$$

$$5) \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

$$6) \sqrt{10} \cdot 10^{\log \frac{7}{4\sqrt{10}}} = \sqrt{10} \cdot \frac{7}{4\sqrt{10}} = \frac{7}{4}$$

$$7) 5^{-\log_5 6} = \frac{1}{6}$$

$$8) 2^{3+5 \log_2 3}$$

$$9) 8^{\log_4 10}$$

$$10) \log_5 \log_2 \log_3 \log_2 512$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 493, 494, 495

*Експоненцијална и логаритамска функција*

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Појам логаритма и основна својства .

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Утврђивање појма логаритма

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна особине логаритма и услове под којим важе

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.6. Решава проблеме који се своде на једначине у којима се појављују елементарне функције

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** логаритам, база, нумерус

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

### Главни део часа: 35 минута

1. Израчунај: 1)  $\frac{1}{2} \log_3 27 + \log_2 1 + \log_2 \frac{1}{8}$

2)  $\frac{5}{4} \log_3 81 + 3 \log_{\frac{1}{2}} 16 - 2 \log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} 27$

3)  $\log_{0,5} 8 - 3 \log_{0,2} \frac{1}{\sqrt{7}} - 2 \log_{0,1} 1000$

4)  $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$

5)  $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$

2. (503. в), збирка) Израчунати:

$$\frac{(\log_{\sqrt[3]{27}} 3 + \log_{\sqrt[4]{5}} 25)(\log_{\sqrt[4]{81}} 9 - \log_{\sqrt[3]{8}} 4)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}$$

Додатни задаци

3. Сведи на један логаритам: 1)  $2 \log_a 3 + 3 \log_a 2$

2)  $\frac{1}{2} \log_a x + 2 \cdot \log_a (\sqrt{xy}) - \frac{1}{2} \log_a y$

4. Израчунати 1)  $\log_3 5$  ако је  $\log_6 2 = a$  и  $\log_6 5 = b$

2)  $\log_5 6$  ако је  $\log 2 = a$  и  $\log_2 7 = b$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 499-506

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Логаритамска функција .

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Испитивање особина логаритамске функције

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна појам логаритамске функције и њену примену у математици.

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.3.3. Уме да скицира графике елементарних функција и да их трансформише користећи транслације и дилатације дуж координатних оса.

2.МА.2.3.4. Решава проблеме користећи основна својства функција (област дефинисаности, периодичност, парност, монотоност, ...)

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** логаритамска функција

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

Подсетимо се  $y = \log_a x$  ако  $a^y = x$  за  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$

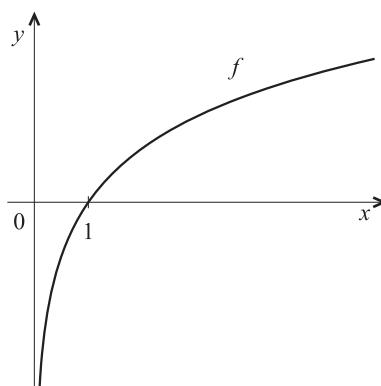
### Главни део часа: 35 минута

Нека је  $x > 0$  тада за свако  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  постоји број  $\log_a x$ .

Логаритамску функцију  $f(x) = \log_a x$ ,  $f : R^+ \rightarrow R$  дефинишемо као пресликавање којим се позитиван број  $x$  пресликава у реалан број  $\log_a x$ .

**Пример 1.** Посматрајмо функцију  $f(x) = \log_2 x$

$x$	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Наведене тачке унесемо у координатни систем:

Користећи наведени график анализирамо особине функције

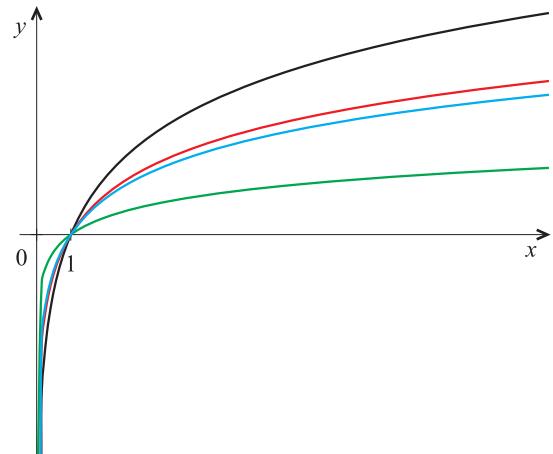
- Област дефинисаности (домен) функције је скуп  $R^+$
- График функције сече осу  $x$  у тачки  $A(1,0)$
- График функције је изнад  $x$ -осе, односно  $f(x) > 0$  за  $x > 1$ , график функције је испод  $x$ -осе, односно  $f(x) < 0$  за  $0 < x < 1$ .
- Ако график посматрамо са лева на десно крива  $f(x) = \log_2 x$  расте, односно кажемо функција је растућа на скупу  $R^+$
- Произвољна права која је паралелна са осом  $y$  и налази се десно од осе  $y$ , сече график наведене функције тачно у једној тачки
- функција је "1-1" пресликавање скупа  $R^+$  на скуп  $R$
- Област вредности функције (кодомен) је скуп  $R$

Сличне особине имају функције:

$$f(x) = \log_2 x, \quad f_1(x) = \log_e x, \quad f_2(x) = \log_3 x,$$

$$f_3(x) = \log_{10} x \quad \dots$$

(наведене функције се приказују уз помоћ презентације)



Уопштено за  $f(x) = \log_a x, \quad a > 1$  важе наведене особине.

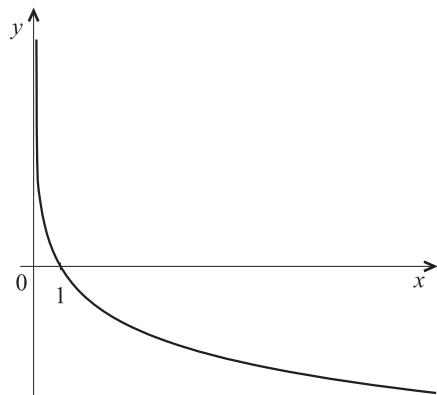
**Пример 2.** Посматрајмо функцију  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  (524.a))

$x$	$1/8$	$1/4$	$1/2$	$1$	$2$	$4$	$8$
$\log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3

Наведене тачке унесемо у координатни систем:

Користећи наведени график анализирамо особине функције

- Област дефинисаности (домен) функције је скуп

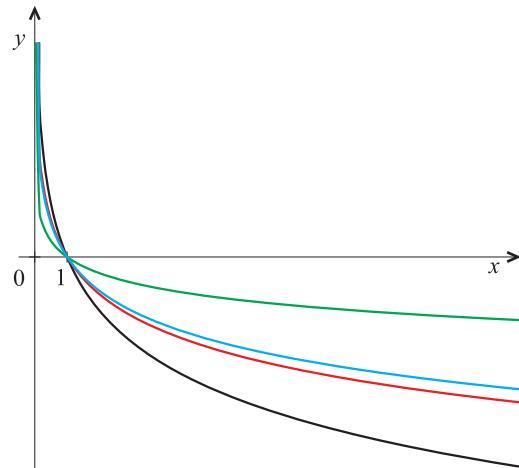


- График функције сече осу  $x$  у тачки  $A(1,0)$
- График функције је изнад  $x$ -осе, односно  $f(x) > 0$  за  $0 < x < 1$ , график функције је испод  $x$ -осе, односно  $f(x) < 0$  за  $x > 1$ .
- Ако график посматрамо са лева на десно крива  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  опада, односно кажемо функција је опадајућа на скупу  $R^+$
- Произвољна права која је паралелна са осом  $y$  и налази се десно од осе  $y$ , сече график наведене функције тачно у једној тачки
- функција је "1-1" пресликавање скупа  $R^+$  на скуп  $R$
- Област вредности функције (кодомен) је скуп  $R$

Сличне особине имају функције:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad f_2(x) = \log_{\frac{1}{10}} x, \dots$$

(наведене функције се приказују уз помоћ презентације)



Уопштено за  $f(x) = \log_a x, a \in (0,1)$  важе наведене особине.

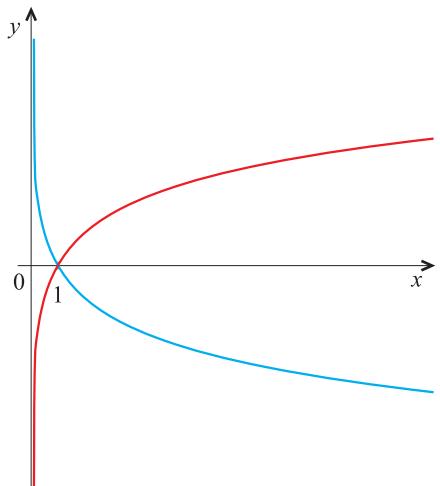
За функцију  $f(x) = \log_a x$  кажемо да је строго растућа ако је  $a > 1$ , односно строго опадајућа ако је  $a < 1$ .

Функција  $f(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$  је симетрична функцији  $f(x) = \log_a x$  у односу на  $x$  осу.

Нацртајмо функције  $f(x) = \log_2 x$  и  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

на истом графику

(наведене функције се приказују уз помоћ презентације)



**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак:

Нацртати функције

1.  $f(x) = \log_3 x$ ,

2.  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ .

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Логаритамска функција

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Испитивање особина логаритамске функције

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна појам логаритамске функције и њену примену у математици.

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.3.3. Уме да скицира графике елементарних функција и да их трансформише користећи транслације и дилатације дуж координатних оса.

2.МА.2.3.4. Решава проблеме користећи основна својства функција (област дефинисаности, периодичност, парност, монотоност, ...)

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** логаритамска функција

### Ток првог часа

#### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка.

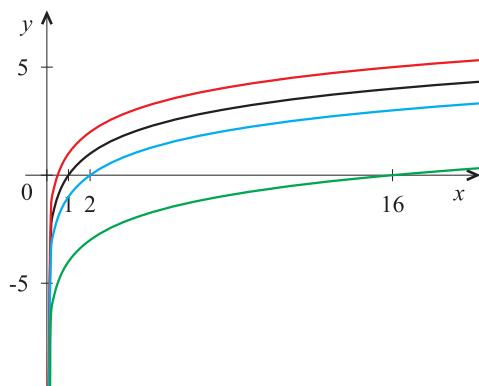
#### Главни део часа: 35 минута

- Користећи график функције  $f(x) = \log_2 x$ , нацртати графике и испитати особине следећих функција

1)  $f_1(x) = \log_2 x + 1$

2)  $f_2(x) = \log_2 x - 1$

3)  $f_3(x) = \log_2 x - 4$



2. Користећи график функције  $f(x) = \log_3 x$ , нацртати графике и испитати особине следећих функција

$$1) f(x) = \log_3 x + 1 \quad 2) f(x) = \log_3(x+1) \quad 3) f(x) = \log_3(x-1)$$

3. Нациртати график и описати особине функције:

$$1) f(x) = \log_2 x - 4$$

Домен:  $x \in (0, +\infty)$

Нуле функције (пресек са осом  $x$ ):

$$\log_2 x - 4 = 0 \quad \text{акко} \quad \log_2 x = 4 \quad \text{акко} \quad x = 2^4 \quad \text{акко} \quad x = 16$$

Знак функције:  $\log_2 x - 4 > 0 \quad \text{акко} \quad \log_2 x > 4 \quad \text{акко} \quad x > 2^4 \quad \text{акко} \quad x > 16$

$$\log_2 x - 4 < 0 \quad \text{акко} \quad \log_2 x < 4 \quad \text{акко} \quad x < 2^4 \quad \text{акко} \quad x < 16$$

Монотононост: Функција стално расте јер је  $a > 1$ .

Кодомен је скуп реалних бројева.

$$2) f(x) = \log_3 x - 1$$

Домен:  $x \in (0, +\infty)$

Нуле функције (пресек са осом  $x$ ):

$$\log_3 x - 1 = 0 \iff \log_3 x = 1 \iff x = 3^1 \iff x = 3$$

Знак функције:  $\log_3 x - 1 > 0 \iff \log_3 x > 1 \iff x > 3^1 \iff x > 3$

$$\log_3 x - 1 < 0 \iff \log_3 x < 1 \iff x < 3^1 \iff x < 3$$

Монотононост: Функција стално расте јер је  $a > 1$ .

Кодомен је скуп реалних бројева.

3)  $f(x) = \log_3(x+2)$

Домен:  $x \in (-2, +\infty)$

Нуле функције (пресек са осом  $x$ ):

$$\log_3(x+2) = 0 \quad \text{акко} \quad x+2 = 3^0 \quad \text{акко} \quad x+2 = 1 \quad \text{акко} \quad x = -1$$

$$\text{Знак функције: } \log_3(x+2) > 0 \quad \text{акко} \quad x+2 > 3^0 \quad \text{акко} \quad x+2 > 1 \quad \text{акко} \quad x > -1$$

$$\log_3(x+2) < 0 \quad \text{акко} \quad x+2 < 3^0 \quad \text{акко} \quad x+2 < 1 \quad \text{акко} \quad x < -1$$

Монотоност: Функција стално расте јер је  $a > 1$ .

Кодомен је скуп реалних бројева.

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 524. а, б)

### Ток другог часа

#### Уводни део часа 5 минута:

Контрола домаћег задатка.

#### Главни део часа: 35 минута

1. Нацртати график и описати особине функције

1)  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

Домен:  $x \in (1, +\infty)$

$$\text{Нуле функције: } \log_{\frac{1}{3}}(x-1) = 0 \quad \text{акко} \quad x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Знак функције:  $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 0$  ако  $x-1 < \left(\frac{1}{3}\right)^0$  ако  $x-1 < 1$  ако  $x < 2$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) < 0$  ако  $x-1 > \left(\frac{1}{3}\right)^0$  ако  $x-1 > 1$  ако  $x > 2$

Монотоност: Функција стално опада јер је  $a < 1$ .

Кодомен је скуп реалних бројева.

2)  $f(x) = \log_2(4x-3)$

Домен:  $x \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

Нуле функције:  $\log_2(4x-3) = 0$  ако  $4x-3 = 2^0$  ако  $4x-3 = 1$  ако  $x = 1$

Знак функције:  $\log_2(4x-3) > 0$  ако  $4x-3 > 2^0$  ако  $4x-3 > 1$  ако  $x > 1$

$\log_2(4x-3) < 0$  ако  $4x-3 < 2^0$  ако  $4x-3 < 1$  ако  $x < 1$

Монотоност: Функција стално расте јер је  $a > 1$ .

Кодомен је скуп реалних бројева.

2. Упоредити бројеве

1)  $\log_3 2$  и  $\log_3 5$

2)  $\log_{\frac{1}{3}} 2$  и  $\log_{\frac{1}{3}} 5$

3)  $\log_2 3$  и  $\log_5 3$

4)  $\log_{\frac{1}{3}} 4$  и  $\log_{\frac{1}{5}} 4$

5)  $\log_3 2$  и  $\frac{2}{3}$

$(\frac{3}{2} \log_3 2 = \log_{3^2} 2^3 = \log_9 8 < 1)$

6)  $\log_9 80$  и  $\log_7 50$

$(\log_9 80 < \log_9 81 = 2 = \log_7 49 < \log_7 50)$

3. Одредити област дефинисаности функција

а)  $f(x) = \log_3(x^2 - x)$

б)  $f(x) = \log_{10}(x^2 - 4)$

в)  $f(x) = \log_e(x^2 - 4x + 3)$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 525. б, в), 526. а), б)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Примена декадног логаритма

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака

**Наставна средства:** збирка, калкулатор

**Циљ часа:** Усвајање процедуре за примену декадног логаритма

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна појам декадног логаритма, његову примену у математици.

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.3.3. Користи елементарне функције за решавање проблема.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** логаритамска функција

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута.

1) Израчунати:                    a)  $\log_7 3$

$$\text{б) } \log_{0.01} 17$$

2) Применом логаритма израчунати вредност израза

$$\text{а) } 2250 \cdot 1,05^{12}$$

$$\text{б) } \left(\frac{4}{5}\right)^{0,36}$$

$$\text{в) } 5 \cdot \sqrt[8]{2,254}$$

3) Решити једначине:

a)  $\log_2 x = 1,028$

б)  $2^x = 3^{x+5}$

в)  $3^x + \frac{4}{3^x} = 5$

г)  $49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$

д)  $64^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{3+3}{x}} + 12 = 0$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 533

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Логаритамска једначина.

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање логаритамске једначине

**Образовни задатак:** Научити ученике различите начине за решавање логаритамских једначина

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.6. Решава проблеме који се своде на једначине у којима се појављују елементарне функције.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** логаритамска једначина

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћег задатка.

**Главни део часа: 35 минута**

Реши једначине:

1)  $\log_5 x = 3$

2)  $\log_{0,04} (x - 3) = -1$

3)  $\log_2 \frac{x+2}{2x-2} = 0$

4)  $7 - \log_3 \left( \frac{3}{5-x} \right) = 6$

5) (527. г), збирка)  $\log_{(x-1)} 3 = 2$

$$6) \lg 5x - \lg 16 = \lg(21x - 8) - 1$$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке 527, 528, 529

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Логаритамска једначина.

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање логаритамске једначине

**Образовни задатак:** Научити ученике различите начине за решавање логаритамских једначина

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.1.6. Решава проблеме који се своде на једначине у којима се појављују елементарне функције.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић,

**Кључни појмови:** логаритамска једначина

### Ток првог часа

#### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка.

#### Главни део часа: 35 минута

Реши једначине:

$$1) \lg(x-9) + 2 \lg \sqrt{2x-1} = 2$$

$$2) \log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$$

$$3) \log_2(x^2 - 4x + 12) = 3$$

$$4) (527. д), збирка) \log_3(5 + 4 \log_3(x-1)) = 2$$

$$5) (528. б), збирка) \log_{15} \log_4 \log_3 x = 0$$

6) (528.в), збирка)  $\log_2 \log_2 x = \log_2 3 + \log_2 4$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке 530, 531, 532

**Ток другог часа**

**Уводни део часа 5 минута:**

Контрола домаћег задатка.

**Главни део часа: 35 минута**

Реши једначине:

$$1) \log_{\frac{1}{2}}(13x - x^2 - 42) = \log_{\frac{1}{2}}(13x - x^2 - 40)$$

$$2) (529. в), збирка) \log_2^2 x + 2 \log_2 \sqrt{x} - 2 = 0$$

$$3) (530. г), збирка) \log_2 x - 2 \log_8 x + \log_{\sqrt{2}}(2x) = \frac{20}{3}$$

$$4) (531. ѡ), збирка) \log_2 182 - 2 \log_2 \sqrt{5-x} = \log_2(11-x) + 1$$

$$5) (531. и), збирка) \log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - \frac{1}{2} = 0$$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 534, 535, 536

## Ток трећег часа

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

Реши једначине:

$$1) \log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 2$$

$$2) (534. д), збирка \quad 9^{1+\log_3 x} + 3^{1+\log_3 x} = 210$$

$$3) (534. г), збирка \quad 8^{\lg x} + 3^{-\lg x} \cdot 24^{\lg(10x)} = 25$$

$$4) (535. а), збирка \quad \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 25$$

$$5) (534. в), збирка \quad 4^{\log_{16} x} - 3^{\log_{16} x - \frac{1}{2}} = 3^{\log_{16} x + \frac{1}{2}} - 2^{2 \log_{16} x - 1}$$

### Завршни део часа: 5 минута.

Домаћи задатак из збирке: 537

## Ток четвртог часа

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

Реши једначине:

$$1. (\text{Пријемни испит, технички факултети 2001}) \quad x^{3-\log_{10} \frac{x}{3}} = 900$$

$$2. (\text{Пријемни испит, ФОН, 2005}) \quad x^{\log_3 x} = 3$$

$$3. (\text{Пријемни испит, ФОН, 2016}) \quad x^{\log_2 x} = 16$$

$$4. (\text{Пријемни испит, ЕТФ 2003}) \quad \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$$

5. (Пријемни испит, ФФ 2007)  $(\log_7 x)^2 + (\log_7 5)(\log_5 x) = 2$

6. (Пријемни испит, ФОН, 2004)  $\log_{5x} \frac{5}{x} + \log_5^2 x = 1$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 538

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Логаритамска неједначина.

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање поступка за решавање логаритамске неједначине

**Образовни задатак:** Научити ученике различите начине за решавање логаритамских неједначина

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.5. Решава неједначине користећи основна својства елементарних функција.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** логаритамска неједначина

### Уводни део часа: 10 минута

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

Приликом решавања логаритамских неједначина осим својства операција са степенима

користимо:

$$\log_a x < \log_a y \quad \text{акко} \quad x < y \quad (a > 1)$$

### Главни део часа: 30 минута

Реши неједначине:

1)  $\log_5 x < 3$

2)  $\log_{0,04} (x - 3) \geq -1$

3)  $\log_2 \frac{x+2}{2x-2} > 0$

4)  $\log_2 (x+14) + \log_2 (x+2) \geq 6$

$$5) \log_2(x^2 - 4x + 12) < 3$$

$$6) \log_{\frac{1}{3}}(5 + 4 \log_3(x - 1)) \leq -2$$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке 545, 546

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Логаритамска неједначина.

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални, индивидуални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Утврђивање поступка за решавање логаритамске неједначине

**Образовни задатак:** Научити ученике различите начине за решавање логаритамских неједначина

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.5. Решава неједначине користећи основна својства елементарних функција.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** логаритамска неједначина

### Ток првог часа

#### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

#### Главни део часа: 35 минута

Реши неједначине:

1.  $(546. \text{ e})) \log_{0,2}(x^2 - x - 2) > \log_{0,2}(-x^2 + 2x + 3)$
2.  $\log_2 5x > \log_2(x^2 + 2x + 2)$   
 $\log_1 \sqrt{x+3}$
3.  $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} < 1$
4.  $(\log_{10}(10x)) \cdot \log_2 x < 2 \log_2 10$
5.  $\log_{x+3}(x^2 - 9x - 10) \leq \log_{x+3} 12$
6.  $\log_{0,5} \log_4 \log_3 x > 0$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 547

**Ток другог часа**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

Задаци са пријемних испита на факултетима (на наставним листићима)

1. (Пријемни испит, ГФ, 2015) Решити неједначину:  $\log_x(3x - 2) > 2$ .
2. (Пријемни испит, СФ, 2015) Колико има целих бројева  $x$  за које је тачна неједнакост  $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) < 2\log_2(5-x)$ .
3. (Пријемни испит, МАТФ, 2014) Нађи скуп решења неједначине:  
 $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) < 2$ .
4. (Пријемни испит, ФОН, 2010) Нађи скуп решења неједначине:  $\log_3(x) < \log_9(x+2)$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Анализа задатака. Домаћи задатак - преостали са часа, 548.

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални, индивидуални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, наставни листићи

**Циљ часа:** Утврђивање поступка за решавање логаритамске неједначине

**Образовни задатак:** Научити ученике различите начине за решавање логаритамских неједначина

**Васпитни задатак:** Развијање концентрације, упорности, уредности, систематичности и самопоуздања

**Функционални задатак:** Развијање код ученика способности за повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.3.1.5. Решава неједначине користећи основна својства елементарних функција.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** логаритамска неједначина

## Ток првог часа

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

### Главни део часа: 35 минута

Задаци са пријемних испита на факултетима (на наставним листићима)

1. (Пријемни испит, ЕТФ, 2014.) Израчунати:  $5^{\frac{3-\log_{10} 5}{\log_{10} 25}}$ .
2. (Пријемни испит, ЕТФ, 2014.) Наћи производ свих реалних решења једначине:  
$$\frac{2013x}{2014} = 2013^{\log_x 2014}.$$
3. (Пријемни испит, ФОН, 2014.) Ако је  $a = \log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{3^{\log_{\sqrt{3}} 27}}$ , израчунати вредност израза  $(a+9)^{\frac{a+9}{2}}$
4. (Пријемни испит, ФОН, 2014.) Колико има реалних решења једначине  
$$\log \sqrt{x-2} + 3 \log \sqrt{(x+2)} = \frac{1}{2} + \log \sqrt{x^2 - 4}$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Анализа задатака. Домаћи задатак - преостали са часа, 549, 550, 553.

**Ток другог часа**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

Задаци са пријемних испита на факултетима (на наставним листићима)

1. (Пријемни испит, СФ, 2014.) Наћи скуп решења неједначине:

$$\log_{\frac{1}{2}} \left( \log_2 \left( x^2 - x + \frac{19}{16} \right) \right) \geq -1.$$

2. (Пријемни испит, ГФ, 2014.) Наћи збир квадрата свих решења једначине:

$$\log_{x^2} 5 + \log_{x^4} 5 = \frac{3}{2}.$$

3. (Пријемни испит, Фармацеутски факултет, 2014.) Инверзна функција функције  $f(x) = 5 + \log_3(x^2 - 4)$  за  $x < -2$ , је?

4. (Пријемни испит, Фармацеутски факултет, 2014.) Наћи решења неједначине:

$$\log_{\frac{1}{3}} (\log_{27}(x^2 - 1)) > 1.$$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Анализа задатака. Домаћи задатак - преостали са часа, 551, 552, 554. Припрема за проверу знања

## 4. Тригонометрија

### Тригонометријске функције

Препоручени садржаји

Уопштење појма угла; мерење угла, радијан.

Тригонометријске функције ма ког угла; вредности тригонометријских функција ма ког угла, својење на први квадрант, периодичност.

Графици основних тригонометријских функција; графици функција облика:

$y = A \sin(ax+b)$  и  $y = A \cos(ax+b)$ .

Адиционе теореме. Трансформације тригонометријских израза (тригонометријских функција двоструких углова и полууглова, трансформације збира и разлике тригонометријских функција у производ и обрнуто).

Тригонометријске једначине и једноставније неједначине.

Синусна и косинусна теорема; решавање троугла.

Примене тригонометрије (у метричкој геометрији, физици, пракси).

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Дефиниција тригонометријских функција оштрог угла код правоуглог троугла

**Тип часа:** понављање и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, калкулатор

**Циљ часа:** Понављање дефиниција тригонометријских функција

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна дефиницију тригонометријских функција на правоуглом троуглу и вредности тригонометријских функција угла од  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ .

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** коришћење калкулатора за израчунавање вредности тригонометријских функција

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометрија

### Уводни део часа: 10 минута

Увод у тему и мотивациони разговор. Основни појмови из тригонометрије су уведени у првом разреду.

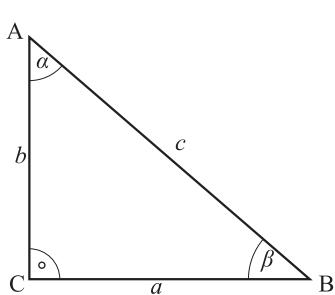
Подсетићемо се укратко тих основних појмова.

*Све видове људске делатности, још од давних времена, прати процес мерења. Интересантно је одређивање растојања када мерење није директно изводљиво.*

*Област математике чији је циљ одређивање непознатих елемената троугла, помоћу неколико познатих зове се тригонометрија. (грчки: *trigonos*-треугао, *metron*-мера). Корене тригонометрије срећемо још у старом веку у Египту и Вавилону. У почетку се тригонометрија бавила искључиво проблемом мерења страница и углова троугла, док се савремена тригонометрија бави тригонометријским функцијама бројева.*

*Основне тригонометријске функције су синус, косинус, тангенс и котангенс, оне се обично дефинишу помоћу правоуглог троугла. Имена тригонометријских функција имају давно порекло. (Ал-Хорезми је користио назив *џаибшто* је искварено читање индијске речи *џива*, која означава тетиву лука, а значи лук или набор (*џеп*). Код Арапа, појам *џаиб* који је Енглез, Роберт од Честера, превео око 1145. године у Шпанији, на латински синус, што значи исто, нарочито кад су у питању набори на одећи, *џепови на тоги рецимо*).*

### Главни део часа: 30 минута.



$$\sin \alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}}$$

За неке оштре углове можемо тачно да одредимо вредности одговарајућих тригонометријских функција:

$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tg \alpha$	$\ctg \alpha$
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Вредности тригонометријских функција за произвољан угао  $\alpha$  рачунају се уз помоћ калкулатора.

**Пример1:** Дужине катете правоуглог троугла ABC је  $a = 16$ , а вредност њеног наспрамног угла је  $\alpha = 30^\circ$ . Одредити дужине страница тог троугла.

**Пример2:** Дужине хипотенузе правоуглог троугла ABC је  $c = 8$ , а вредност оштрог угла  $\alpha = 52^\circ$ . Одредити дужине страница тог троугла.

**За комплементне углове  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ) важе релације:**  $\sin \alpha = \cos \beta$ ,  $\sin \beta = \cos \alpha$ ,  $\tg \alpha = \ctg \beta$  и  $\ctg \alpha = \tg \beta$ .

1. Израчунај вредност израза:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{\sin 32^\circ + 5 \cos 58^\circ}{2 \cos 58^\circ} & \text{б)} \frac{\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ} \\ \text{в)} \frac{\sin 52^\circ - 2 \tg 52^\circ - \cos 38^\circ}{\sin 38^\circ + \ctg 38^\circ - \cos 52^\circ} & \end{array}$$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак:

- 1) Дати су хипотенуза  $c = 24$  правоуглог троугла и  $\alpha = 60^\circ$ . Израчунати катете.
- 2) Израчунај вредност израза:
  - a)  $\frac{5 \sin 25^\circ + 7 \cos 65^\circ}{2 \sin 25^\circ}$
  - б)  $\frac{\ctg 60^\circ + \ctg 45^\circ}{\tg 30^\circ + \tg 45^\circ}$
  - в)  $\frac{\sin 20^\circ \cdot \ctg 70^\circ}{\cos 70^\circ \cdot \tg 20^\circ}$
- 3) Одреди крак  $b$  једнакокраког троугла ако је  $\alpha = 32^\circ$  а висина  $h = 12$ .



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Основне тригонометријске идентичности

**Тип часа:** понављање и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Уочавање основних веза између тригонометријских функција

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна основне тригонометријске идентичности

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** примена тригонометријских идентичности у задацима

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометрија

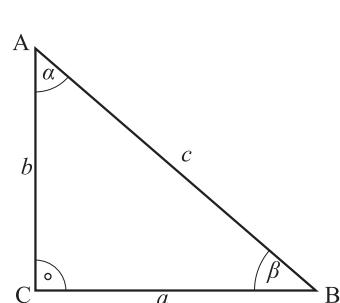
### Уводни део часа: 5 минута.

Тригонометријске функције нису међусобно независне. Уз помоћ једне тригонометријске функције можемо израчунати остале. Поновимо познате тригонометријске идентитетете

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

### Главни део часа: 35 минута.

Наведени идентитети се једноставно доказују помоћу дефиниције тригонометријских функција:



$$a^2 + b^2 = c^2 \quad / :c^2$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

1. Израчунати вредности осталих тригонометријских функција, ако је дато:

a)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$       б)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$

2. Израчунати:  $A = \frac{3 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2}$ , ако је дато:  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ .

3. Ако је  $\frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 1$  израчунати  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Решење  $\frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 1$ , дељењем са  $\cos \alpha$ , имамо  $\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 2} = 1$ , тј.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$ .

4. Доказати једнакост: а)  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

б)  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = (1 + \cos \alpha)(1 + \operatorname{tg} \alpha)$

в)  $\frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = -2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$

Решење а)  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

б)  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = (1 + \cos \alpha) + (1 + \cos \alpha) \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = (1 + \cos \alpha)(1 + \operatorname{tg} \alpha)$

в)  $\frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{-2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$

5. Израчунати  $\sin \alpha$  ако је  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{1}{81}$ . [  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  ]

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак:

1) Израчунати вредност израза  $A = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \cos \alpha}{\cos \beta - \operatorname{ctg} \beta}$  ако је  $\sin \alpha = 0,6$  и  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . ( $A = -1$ )

2) Доказати:  $\sin \alpha \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha = 1$ .

3) Доказати: а)  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$       б)  $\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ .

4) Израчунати вредност израза:  $Y = \frac{3 \sin^3 \alpha - 4 \cos^3 \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$ , ако је  $\operatorname{tg} \alpha = a$ .

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Уопштење појма угла, мерење угла

**Тип часа:** комбиновани: обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање појма уопштеног угла и мерење угла

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна меру угла у степенима и радијанима и да у правоуглом координатном систему нацрта угао и одреди оријентацију истог

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** развијање вештине превођења степена у радијане и обратно

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

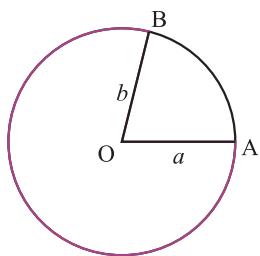
**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** радијан, степен

**Уводни део часа: 5 минута.**



Радијан је уз степен јединица за мерење углова. Радијан је дужина лука  $AB$  јединичне кружнице који се види под датим углом  $AOB$  из центра круга. Пун угао износи  $2\pi$  радијана.

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,017$$

$$1\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'' \text{ mј. } [180^\circ : \alpha^\circ = \pi : \varphi \text{ rad}]$$

**Главни део часа: 35 минута.**

Уопштеним угаљем у равни називамо сваки израз облика  $kP + \alpha$ , где је  $k$  цео број,  $P$  је пун угао,  $\alpha$  је неки оријентисани угао. ( Угао је оријентисан ако се зна који крак је почетни, а који крајњи)

1. Одредити радијанску меру угла од:  $300^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $330^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $12^\circ 15'$ ,  $18,5^\circ$ ,  $6,4^\circ$ .

Решење а)  $180^\circ : 300^\circ = \pi : \varphi \text{ rad}$  одакле добијамо  $300^\circ = \frac{5}{3} \pi \text{ rad}$

2. Одредити меру у степенима угла:  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{12}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{7\pi}{12}$ ,  $\frac{8\pi}{9}$ .
3. Одредити радијанску меру уопштеног угла:  $420^\circ$ ,  $780^\circ$ ,  $900^\circ$ ,  $-120^\circ$ ,  $-225^\circ$ ,  $-840^\circ$ .
4. Одредити меру у степенима угла:  $4\pi$ ,  $-\frac{\pi}{12}$ ,  $-\frac{3\pi}{2}$ ,  $-\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{32\pi}{12}$ ,  $\frac{13\pi}{6}$ .
5. Изразити у радијанима угао између сатних казаљки:  
а) у  $10\text{h}$       б) у  $7\text{h}$       в) у  $9\text{h}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 586, 587.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске функције на кругу

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, калкулатор

**Циљ часа:** Усвајање дефиниције тригонометријских функција реалног броја помоћу тригонометријске кружнице

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да се реалном броју додели тачка са тригонометријске кружнице и да су координате те тачке вредности синуса и косинуса тог броја

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** развијање вештине сналажења на тригонометријској кружници

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.  
**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

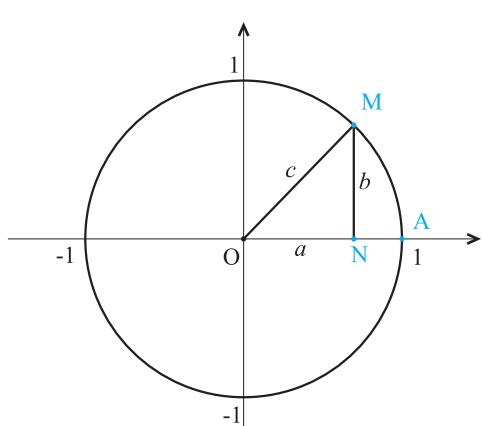
**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријска кружница

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка

**Главни део часа: 35 минута**

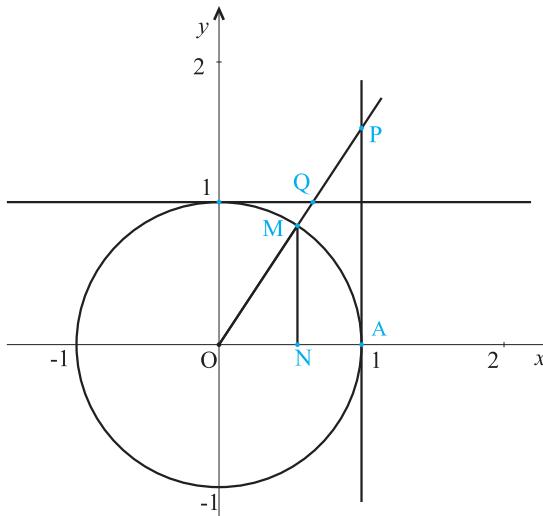


Јединични круг са центром у координатном почетку назива се тригонометријски круг. Уопштени угао  $\varphi = \alpha + 2k\pi$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$  је угао чији је почетни крак позитивни део x осе, а крајњи крак оријентисана дуж ON. Тачка A се назива почетна тачка.

Позитиван смер угла је смер супротан казаљки часовника. Знаке тригонометријских функција угла одређујемо према квадранту у коме се завршава крак OM угла. (Означити на кружници квадранте )

$$\sin \alpha = \frac{|MN|}{|OM|} \quad \cos \alpha = \frac{|ON|}{|OM|} . \quad \text{Обзиром да је } OM=1, \text{ закључујемо:}$$

$$\sin \alpha = |MN| \quad \cos \alpha = |ON| \quad \text{Односно: } M(x,y) \quad \sin \alpha = y \quad \cos \alpha = x$$

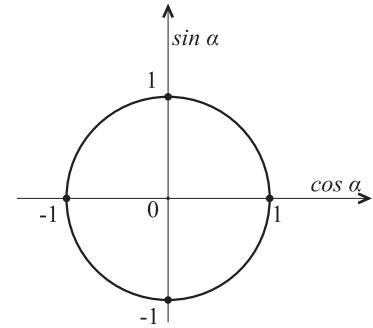


Тачка М припада кружници чији је полуупречник 1, што значи да су функције  $\sin \alpha = y$  и  $\cos \alpha = x$  ограничена, односно важи:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{и} \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad \text{за сваки угао } \alpha$$

За приказивање вредности тангенса и котангенса уводе се тангенте  $t1$  и  $t2$ . Пресек полуправе  $OM$  са тим тангентама означимо са  $P$  и  $Q$ . Тада важи  $\operatorname{tg} \alpha = AP$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = CQ$ .

$\cos 0 = 1$	$\sin 0 = 0$
$\cos \frac{\pi}{2} = 0$	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$
$\cos \pi = -1$	$\sin \pi = 0$
$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$	$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$
$\cos 2\pi = 1$	$\sin 2\pi = 0$



На основу наведеног и дефиниције функција тангенс и котангенс важи

$$\begin{array}{ll} \operatorname{tg} 0 = 0 & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0 \\ \operatorname{tg} \pi = 0 & , \quad \text{а изрази } \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}, \operatorname{ctg} 0, \operatorname{ctg} \pi, \operatorname{ctg} 2\pi \text{ нису дефинисани.} \\ \operatorname{tg} 2\pi = 0 & \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} = 0 \end{array}$$

- Представити на тригонометријској кружници следеће углове и израчунати тригонометријске функције истих (одабрати неке од предложених, а преостале задати за домаћи задатак):

- A)  $70^\circ, -60^\circ, 120^\circ, -140^\circ, 220^\circ, 330^\circ, 390^\circ, 780^\circ$   
 Б)  $\frac{\pi}{5}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, -\frac{10\pi}{9}, \frac{11\pi}{6}, \frac{14\pi}{3}, \frac{13\pi}{4}$ .

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак: направити модел тригонометријске кружнице и завршити задатак 1.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске функције на кругу

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, калкулатор, модели тригонометријских кружница

**Циљ часа:** Израчунавање вредности тригонометријских функција датог угла

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да прочита вредности тригонометријских функција датих углова са тригонометријске кружнице

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** развијање вештине сналажења на тригонометријској кружници

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријска кружница

### Уводни део часа: 10 минута.

Контрола домаћег задатка

У ком квадранту је крајњи крак угла  $\alpha$  ако је

- 1)  $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$       2)  $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$       3)  $\operatorname{tg} \alpha < 0, \cos \alpha > 0$

### Главни део часа: 30 минута.

1. Израчунај вредност израза:

a)  $3 \sin^4 90^\circ - \sin 90^\circ - 2 \cos 180^\circ$  [4]

б)  $3 \cdot \cos \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \sin 45^\circ - \sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ$  [0]

в) 
$$\frac{\left(1 - 3 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)^2}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - (\cos 30^\circ)^{-1}}$$

$$\text{г) } \sin 180^\circ \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2} + (\cos 360^\circ)^{-1} + \frac{1}{\sin(-270^\circ)} \quad [2]$$

2. Нацртати крајњи крак угла  $\alpha$  на тригонометријској кружници ако је а)  $\operatorname{tg}\alpha = 2$   
б)  $\operatorname{ctg}\alpha = -2$
3. Приказати помоћу тригонометријског круга вредности тригонометријских функција угла  $\alpha$  ако је:  
а)  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$       б)  $\alpha = \frac{5\pi}{4}$       в)  $\alpha = \frac{5\pi}{6}$       г)  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$       д)  $\alpha = -\frac{4\pi}{3}$
4. Точак се обреће брзином од  $4\pi$  радијана у минути. За који угао се обреће исти точак за 3 минуте и 40 секунди?
5. Какав је по знаку израз  $\cos 5 \cdot \sin 10^\circ$ ?

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 588, 589.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Основне релације између тригонометријских функција.

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање особина тригонометријских функција

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да наведе и примени особине тригонометријских функција

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** уочавање веза између тригонометријских функција

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријске релације

### Уводни део часа: 5 минута.

Контрола домаћег задатка

### Главни део часа: 35 минута

1. Израчунати вредности осталих тригонометријских функција, ако је дато:

a)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

б)  $\cos \alpha = -0,2$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

в)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$  и  $0 < \alpha < \pi$

2. Доказати једнакости: а)  $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x \cdot (\sin x + \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \sin x - \cos x$

б)  $\sin^3 x \cdot (1 + \operatorname{ctgx}) + \cos^3 x \cdot (1 + \operatorname{tg} x) = \sin x + \cos x$

в)  $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$

Решење а)

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x \cdot (\sin x + \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x \cdot (\sin x + \cos x) - \cos^2 x \cdot (\sin x + \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \sin x - \cos x$$

б)

$$\begin{aligned} & \sin^3 x \cdot (1 + ctgx) + \cos^3 x \cdot (1 + tgx) = \sin^3 x \cdot \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x \cdot \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \\ & = \sin^3 x \cdot \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x \cdot \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right) = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x + \cos x \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned} & 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = \\ & = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ & = \sin^4 x + \cos^4 x + 2(1 - \cos^2 x)\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) + 2\cos^2 x = 1 \end{aligned}$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 594, 618, 619.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Основне релације између тригонометријских функција.

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Утврђивање особина тригонометријских функција

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да наведе и примени особине тригонометријских функција

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** уочавање веза између тригонометријских функција

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријске релације

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

Упростити изразе:

$$\text{а) } \frac{\sin x}{1 + ctgx} + \frac{\cos x}{1 + tgx} = \frac{\sin x}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} + \frac{\cos x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sin x + \cos x}$$

$$\text{б) } \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \quad [1]$$

$$\text{в) } \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x} \cdot \frac{1 + ctg^2 x}{ctg^2 x}$$

$$\text{г) } \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{1 + \sin x \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{1 + \sin x \cos x} = \sin x - \cos x$$

$$\text{д) } \cos^3 \alpha \cdot (1 - tg \alpha)(1 + tg \alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \\ \text{e)} \cos^2 \alpha \cdot (2 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + 2\operatorname{tg} \alpha) - 5 \sin \alpha \cos \alpha &\quad [2] \end{aligned}$$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 620-624.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Особине тригонометријских функција

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, модели тригонометријских кружница

**Циљ часа:** Утврђивање особина тригонометријских функција

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да наведе и примени особине тригонометријских функција

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** уочавање веза између тригонометријских функција

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријска кружница

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка

#### Пример 1.

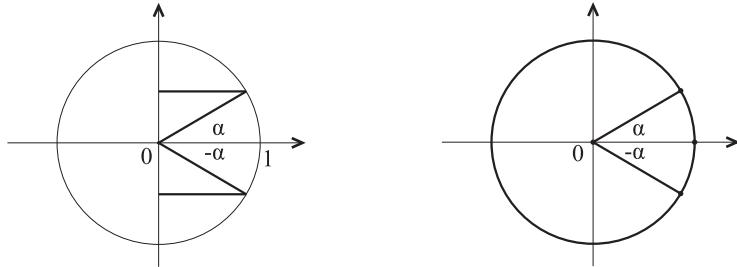
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} \quad \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

### Главни део часа: 35 минута

На моделу тригонометријске кружнице објаснити особине тригонометријских функција:

$$\begin{array}{lll} \text{Периодичност:} & \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha & \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha \\ & \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg} \alpha & k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

**Парност и непарност:**  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$        $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$



На основу претходног закључујемо:       $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$        $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

1. Одреди вредности тригонометријских функција угла:

$$\frac{7\pi}{3}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}.$$

2. Да ли постоји угао такав да је  $2\sin \alpha + 3\cos \alpha = 5$ ? Објасни.

3. Одреди вредност израза  $\frac{\sin 765^\circ \cdot \sin 420^\circ}{\cos 405^\circ \cdot \operatorname{tg} 225^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-210^\circ)}$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 625-628.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Свођење тригонометријских функција ма ког угла на тригонометријске функције оштрогугла.

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, модели тригонометријских кружница

**Циљ часа:** израчунавање тригонометријских функција углова који се могу приказати преко оштрогугла

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна поступак свођењаугла на први квадрант

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** израчунавање тригонометријских функција углова свођењем на први квадрант

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** свођење углова на први квадрант

### Уводни део часа: 5 минута

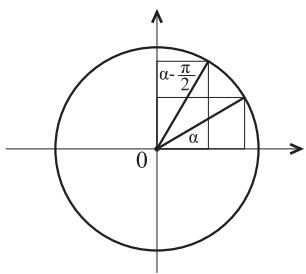
Контрола домаћег задатка и решавање оних који нису били јасни

### Главни део часа: 35 минута

Ако је  $\alpha = \pi \pm 2k\pi$  или  $\alpha = 2\pi \pm 2k\pi$  тригонометријска функција се не мења, а знак тригонометријске функције се одређује помоћу тригонометријског круга.

Ако је  $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$  или  $\alpha = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$  тригонометријска функција се мења у своју

кофункцију, а знак тригонометријске функције се одређује помоћу тригонометријског круга.

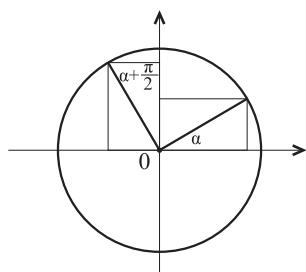


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

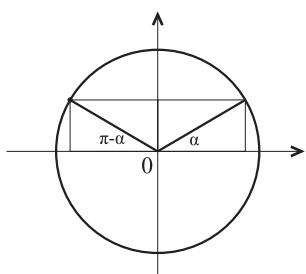


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

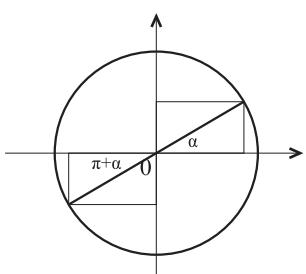


$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

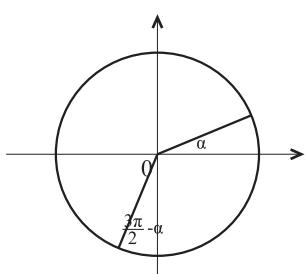


$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

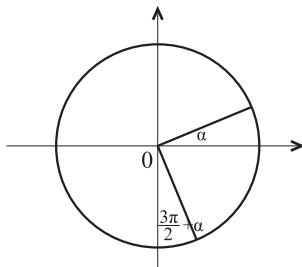


$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

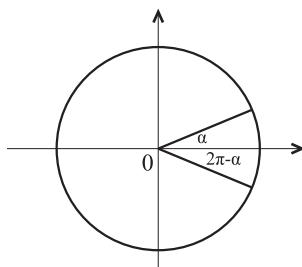


$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$



$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

**Пример 1.** Одреди вредности тригонометријских функција угла:  $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{8\pi}{3}$ .

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 632.



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Свођење тригонометријских функција ма ког угла на тригонометријске функције оштраг угла.

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, модели тригонометријских кружница

**Циљ часа:** проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Ученик треба да обнови и примени стечено знање

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** израчунивање тригонометријских функција угла свођењем на први квадрант

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** свођење угла на први квадрант

**Ток првог часа:**

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка и решавање оних који нису били јасни

### Главни део часа: 35 минута

Упростити изразе:

- 1) 
$$\frac{\cos(180^\circ + \alpha) \cdot \tg 110^\circ \sin 324^\circ \sin 90^\circ}{\sin(90^\circ + \alpha) \cos 120^\circ \ctg 70^\circ \cos 180^\circ}$$
- 2) 
$$\sin(90^\circ + \alpha) \cos(270^\circ - \alpha) + \sin(\alpha - 90^\circ) \cos(\alpha - 180^\circ)$$
- 3) 
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \sin(4\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cos(\alpha - 2\pi)$$

- 4)  $\frac{\sin^3(\alpha - 270^\circ) \cos(360^\circ - \alpha)}{\tg^3(\alpha - 90^\circ) \cos^3(\alpha - 270^\circ)}$
- 5)  $2 \sin 40^\circ + \cos 130^\circ - 3 \sin 160^\circ - \cos(-110^\circ)$
- 6)  $\frac{\cos 727^\circ + 2 \sin 173^\circ 2 \cos 263^\circ}{5 \cos(-7^\circ)}$
- 7)  $\frac{\sin^2(\pi + \alpha)}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} + \frac{\tg^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\ctg^2(\pi + \alpha)}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 63. а, б, в, г, д, ѡ)

**Ток другог часа:****Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћег задатка и решавање оних који нису били јасни

**Главни део часа: 35 минута**

Доказати идентитетете:

1.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos(\pi - \alpha) \ctg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \ctg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
2.  $\ctg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \tg(\pi + \alpha) \cos(\pi + \alpha) \cos(2\pi - \alpha)$
3.  $\tg 44^\circ \cdot \tg 45^\circ \cdot \tg 46^\circ = 1$
4.  $\tg 10^\circ \cdot \tg 20^\circ \cdot \tg 30^\circ \cdot \tg 40^\circ \cdot \tg 50^\circ \cdot \tg 60^\circ \cdot \tg 70^\circ \cdot \tg 80^\circ = 1$
5. Израчунати: 1)  $10 \ctg 135^\circ \cdot \sin 210^\circ \cdot \cos 225^\circ$   
2)  $2 \sin^2 225^\circ - \ctg 330^\circ \cdot \tg 405^\circ$   
3)  $\frac{\ctg(-1230^\circ) \cos 570^\circ}{\tg 675^\circ - \sin 570^\circ}$   
4)  $\sin \frac{10\pi}{3} \cos \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{4\pi}{3} \sin \frac{5\pi}{6}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 634. е, ж, ј)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** групни

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** наставни листићи, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Ученик треба да обнови и примени стечено знање

**Васпитни задатак:** Развијање критичког односа према сопственом раду, развијање самосталности, комуникације, кооперативности и социјалне интегрисаности.

**Функционални задатак:** ученик треба да препозна значај повезивања градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Врши поделу ученика у хетерогене групе према унапред испланираном сценарију и на крају часа анализира са ученицима задатке

**Активност ученика:** Учествују у раду групе

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометрија

### Уводни део часа: 5 минута

Подела ученика у групе и подела наставних листића

### Главни део часа: 30 минута

Упростити изразе:

1. (Пријемни испит, ФФ 2004.)  $\cos^2 12 + \cos^2 24 + \cos^2 36 + \cos^2 54 + \cos^2 66 + \cos^2 78$
2. (Пријемни испит, ФОН 2005.) 
$$\frac{3\cos 50^\circ - 4\sin 140^\circ}{\cos 130^\circ}$$
3. (Пријемни испит, СФ 2003.) 
$$\frac{\sin 765^\circ \cdot \sin 120^\circ}{\cos 135^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-30^\circ)}$$
4. (Пријемни испит, ЕТФ 2005.) Ако је  $\operatorname{tg}\alpha = -7, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , израчунај вредност израза: 
$$\frac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$$
5. (Пријемни испит, ФФ 2002.) Ако је  $\operatorname{tg}x - \operatorname{ctgx} = m$  изрази  $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{ctg}^3 x$  у зависности од  $m$ .
6. Дати су бројеви  $\sin 100^\circ, \operatorname{tg}100^\circ, \cos 1000^\circ$ . Поређај их по величини.

**Завршни део часа: 10 минута.**

Дискусија задатака

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Графичко представљање тригонометријских функција.

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** упознавање са графицима тригонометријских функција

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да нацрта график функције цртањем коначно много тачака те функције и да уочи особине тригонометријских функција на основу графика

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** развити вештину брзог и тачног цртања графика тригонометријске функције

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.3.3. Уме да скицира графике елементарних функција и да их трансформише користећи транслације и дилатације дуж координатних оса.

2.МА.2.3.4. Решава проблеме користећи основна својства функција (област дефинисаности, периодичност, парност, монотоност, ...)

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** график функције

**Ток првог часа:**

### Уводни део часа: 5 минута

Ученици се подсећају на који начин смо цртали претходно научене функције.

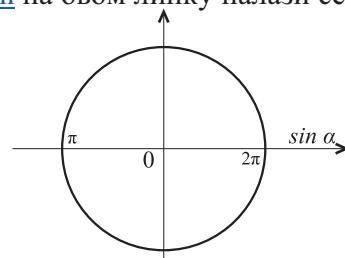
Препоручити ученицима (ако постоји рачунар са интернет везом) на часу да прате линк [https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_en.html) на овом линку налази се симулација)

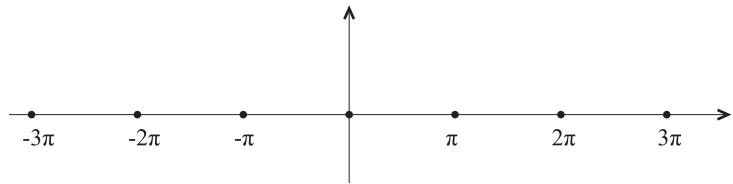
### Главни део часа: 35 минута

**Пример 1.** Посматрајмо функцију  $f(x) = \sin x$

Подсетимо се када је вредност наведене функције нула.

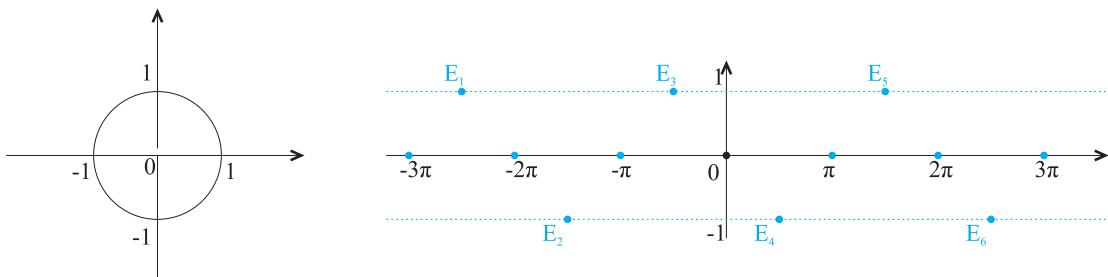
Нуле функције су оне тачке функције у којима график сече x осу:  $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$



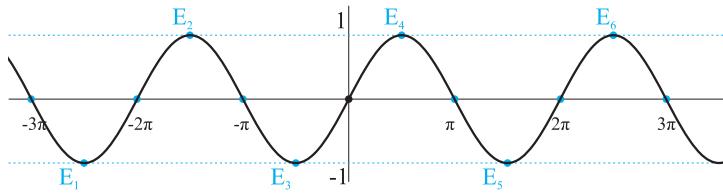


На основу претходно наученог зnamо да функција  $f(x) = \sin x$  има најмању вредност  $-1$  и највећу вредност  $1$ .

$$\left( \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1, \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \dots \right)$$

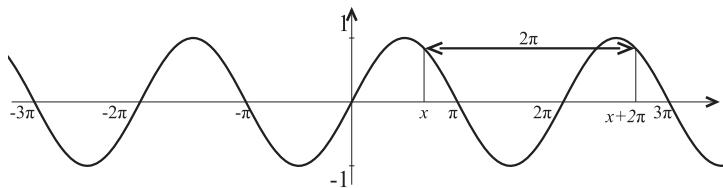


Спајањем наведених тачака добијамо график функције  $f(x) = \sin x$



Функција  $f(x) = \sin x$  је дефинисана за свако  $x \in R$ . Дакле домен ове функције је скуп реалних бројева. Кодомен функције  $f(x) = \sin x$  је интервал  $[-1, 1]$ .

Наведена функција је периодична са основним периодом  $2\pi$ .

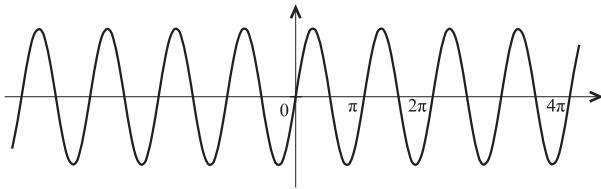


Функција  $f(x) = \sin x$  је непарна, односно за свако  $x \in R$  важи  $\sin(-x) = -\sin x$ . То значи да је график ове функције симетричен у односу на координатни почетак.

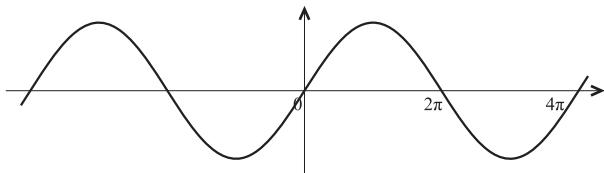
График функције  $f(x) = \sin x$ , који називамо синусоиду, је ограничен правама  $y=1$  и  $y=-1$ .

**Пример 2.** Посматрајмо функцију  $f(x) = \sin 2x$ .

Приликом цртања на исти начин бирамо вредности независно променљиве као у претходном примеру. Потребно је заједно са ученицима објаснити особине ове функције. Уочавамо да је основни период функције  $\pi$ .

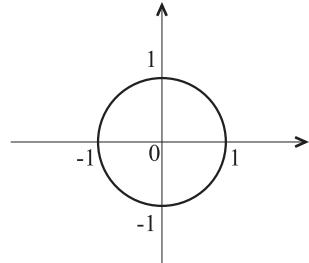


**Пример 3.** Посматрајмо функцију  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ .



Уочавамо да је основни период функције  $4\pi$ .

Потребно је заједно са ученицима објаснити особине ове функције.

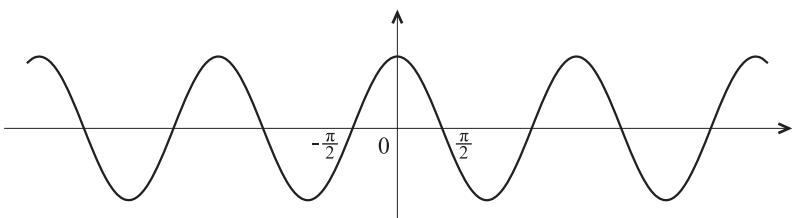


**Пример 4.** Посматрајмо функцију  $f(x) = \cos x$

Подсетимо се када је вредност наведене функције нула.

Нуле функције су оне тачке функције у којима график сече x осу:  $\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

Као и до сада прво уносимо нуле функције, затим најмање и највеће вредности односно вредности у којима  $\cos x$  добија вредности  $-1$  и  $1$ . Спајањем наведених тачака (уз претпоставку да је реч о непрекидној функцији) добијамо график функције:



Уочимо да се график функције  $f(x) = \cos x$  може добити из графика функције  $f(x) = \sin x$  када се он помери улево за вредност  $\frac{\pi}{2}$ . ( Користимо  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  )

Функција  $f(x) = \cos x$  је дефинисана за свако  $x \in R$ . Дакле домен ове функције је скуп реалних бројева. Кодомен функције  $f(x) = \cos x$  је интервал  $[-1, 1]$ .

Наведена функција је периодична са основним периодом  $2\pi$ .

Функција  $f(x) = \cos x$  је парна, односно за свако  $x \in R$  важи  $\cos(-x) = \cos x$ . То значи да је график ове функције симетричан у односу на осу у.

График функције  $f(x) = \cos x$ , који називамо косинусоидом, је ограничен правама  $y=1$  и  $y=-1$ .

**Завршни део часа: 5 минута.**

1. Нацртати и дискутовати графике функција

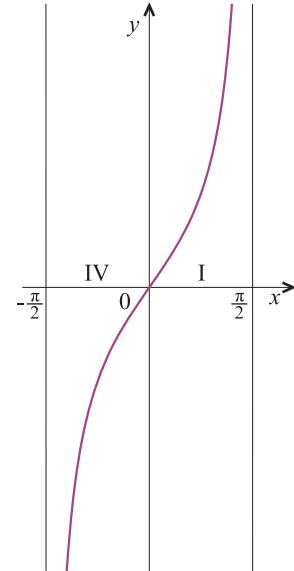
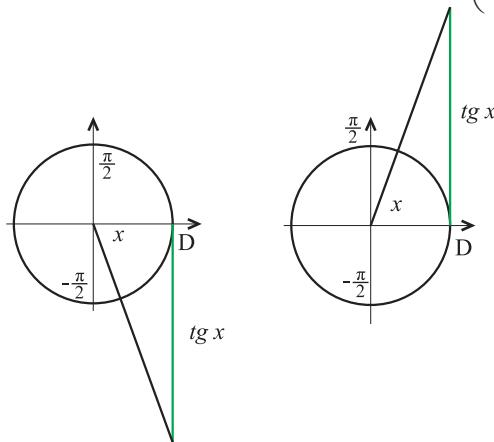
a)  $f(x) = \cos 2x$ ,      б)  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

**Ток другог часа:****Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћег задатка

Препоручити ученицима (ако постоји рачунар са интернет везом) на часу да прате линк [https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_en.html) на овом линку налази се симулација)**Главни део часа: 35 минута**

**Пример 1.** Посматрајмо график функције  $f(x) = \tan x$ . Посматрајмо вредности тангенса у првом и четвртом квадранту. Ако  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  онда  $\tan x \in (-\infty, \infty)$



Посматрајмо вредности тангенса у другом и трећем квадранту. Ако  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  онда  $\tan x \in (-\infty, \infty)$  и график изгледа исто.

График функције  $f(x) = \tan x$  зове се тангенсоида, а изгледа овако (слика десно):

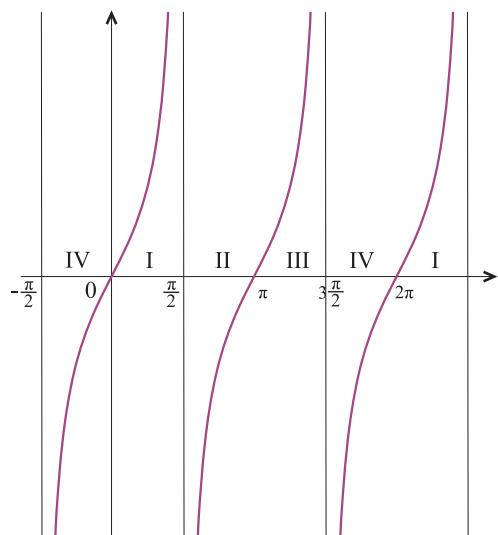
Нуле ове функције (тачке пресека са осом  $x$ ) су  $k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Праве  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  су асимптоте функције  $f(x) = \tan x$

Функција  $f(x) = \tan x$  је непарна, што значи да је њен график симетричен у односу на у осу.

Ова функција је неограничена, што значи да нема минималну ни максималну вредност.

Основни период функције  $f(x) = \tan x$  је  $\pi$



**Пример 2.** Заједно са ученицима црта се график функције  $f(x) = ctgx$  и изводе се закључци. (користимо  $ctgx = -\tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ).

1. Одредити периоде функција

a)  $f(x) = \frac{1}{3} \sin(2x + 3)$

б)  $f(x) = -2 \cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

в)  $f(x) = 2\tg(4x + 1)$

2. Испитати парност функција

a)  $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

б)  $f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos 3x}{x^2}$

в)  $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\tg x}$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 827, 829.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Графичко представљање тригонометријских функција.

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** утврђивање особина тригонометријских функција

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да нацрта график функције цртањем коначно много тачака те функције и да уочи особине тригонометријских функција на основу графика

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** развити вештину брзог и тачног цртања графика тригонометријске функције

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.3.3. Уме да скицира графике елементарних функција и да их трансформише користећи транслације и дилатације дуж координатних оса.

2.МА.2.3.4. Решава проблеме користећи основна својства функција (област дефинисаности, периодичност, парност, монотоност, ...)

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** график функције

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка

1. Колико основних тригонометријских функција има домен  $R$ ?
2. Које су основне тригонометријске функције парне, а које не?

### Главни део часа: 35 минута

1. (831. збирка) Дата је функција  $f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$ . Испитати да ли постоје и у случају потврдног одговора одредити  $f(0), f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ .
2. (836. збирка) Одредити минимум функције  $y = \sin x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

3. (837. збирка) Испитати ток и нацртати график функције:  $y = -\sin x$
4. (842. збирка) Испитати ток и нацртати график функције:  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Додатни задаци

5. (848. збирка) Испитати ток и нацртати график функције:  $f(x) = 2 \sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$
6. (850. збирка) Испитати ток и нацртати график функције:  $f(x) = \frac{4}{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 838-842.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Графичко представљање тригонометријских функција.

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** групни

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** развијање самосталности приликом цртања тригонометријских функција

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да нацрта график функције цртањем коначно много тачака те функције и да уочи особине тригонометријских функција на основу графика

**Васпитни задатак:** Развијање социјалних контаката, комуникације, толеранције, критчког односа према сопственом знању

**Функционални задатак:** развити вештину брзог и тачног самосталног цртања графика тригонометријске функције

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.3.3. Уме да скицира графике елементарних функција и да их трансформише користећи транслације и дилатације дуж координатних оса.

2.МА.2.3.4. Решава проблеме користећи основна својства функција (област дефинисаности, периодичност, парност, монотоност, ...)

**Активност наставника:** Врши поделу ученика у групе, даје упутства о раду, на крају часа врши анализу резултата применом презентације

**Активност ученика:** Учествују у раду групе

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** график функције

### Уводни део часа: 5 минута

Подела ученика на групе, у оквиру групе ученици решавају задатке

### Главни део часа: 30 минута

1) (851. збирка) Испитати ток и нацртати график функције:  $f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

2) (852. збирка) Испитати ток и нацртати график функције:  $f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

3) (853. збирка) Испитати ток и нацртати график функције:  $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

4) (858. збирка) Одредити период функција:

a)  $f(x) = \sin^2 x$       б)  $f(x) = \sin^2 x \cos x$       в)  $f(x) = \sin^3 x$

г)  $f(x) = \cos^4 x$       д)  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$       ђ)  $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$

**Завршни део часа: 10 минута.**

Приказивње решења задатака и упоређивање са радом група, оцењивање група  
Домаћи задатак из збирке: 833, 834, 835.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Адиционе теореме

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање адиционих формулe

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени адиционе формуле у сређивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

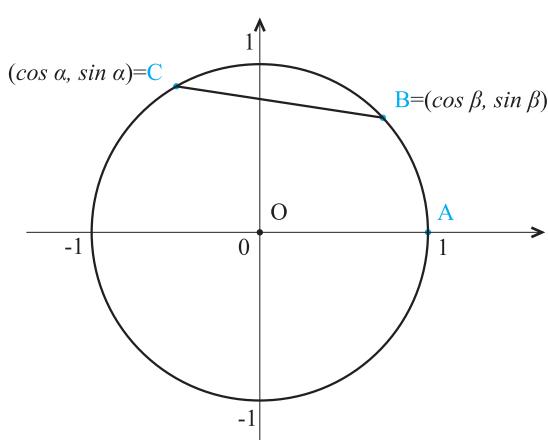
**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** адиционе формуле

**Уводни део часа: 5 минута.**

$$\text{Поновимо: } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha, \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha, \dots$$

**Главни део часа: 35 минута**



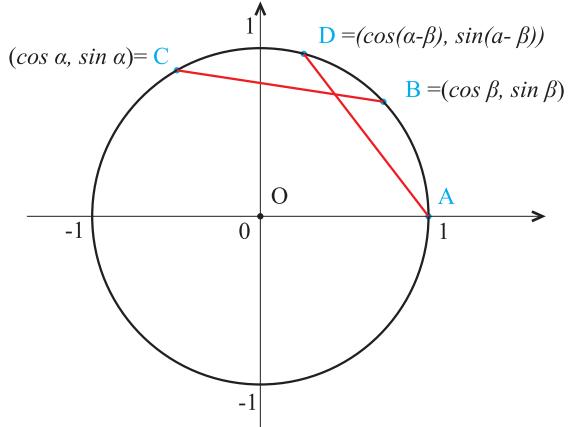
Посматрајмо лукове:

$$\hat{AB} = \beta \quad \beta \in (0, 2\pi)$$

$$\hat{AC} = \alpha \quad \alpha \in (0, 2\pi)$$

$$\hat{BC} = \alpha - \beta \quad \alpha > \beta$$

Уочимо сада тачку D такву да је дужина лука  $AD = \alpha - \beta$ :



Лукови BC и AD су једнаке дужине.

Дужина дужи BC је

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} \\ |BC| &= \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta} \\ |BC| &= \sqrt{2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta} \end{aligned}$$

Дужина дужи AD је

$$\begin{aligned} |AD| &= \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2} \\ |AD| &= \sqrt{\cos^2(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta)} \\ |AD| &= \sqrt{2 - 2 \cos(\alpha - \beta)} \\ |BC| &= |AD| \\ 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) &= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

добијамо формулу

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

Ако уместо  $\beta$  узмемо  $-\beta$  добијамо  $\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$ , односно

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

Наведене формуле су адиционе формуле за косинус.

Адиционе формуле за синус добијамо помоћу адиционих формул за косинус:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}$$

Ако уместо  $\beta$  узмемо  $-\beta$  добијамо  $\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$ , односно

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}$$

### Задаци

1. Израчунати:  $\sin 105^\circ$ ,  $\cos \frac{5\pi}{12}$
2. Ако је  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  и  $\sin \beta = -\frac{5}{13}$ ,  $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  израчунати  $\sin(\alpha + \beta)$
3. Израчунати  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ , ако је  $\tan \alpha = 2$ ,  $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

### Завршни део часа: 5 минута.

Домаћи задатак из збирке: 642-646.



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Адиционе теореме

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увежбавање адиционих формул

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени адиционе формуле у срећивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** адиционе формуле

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка. Понављање адиционих формул за синус и косинус

**Главни део часа: 35 минута**

1) (649. збирка) Израчунати в)  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$  и  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ , ако је  $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$  и  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

2) (652. збирка) Израчунати  $\cos(\alpha + \beta)$ , ако је

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{24}{7}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{15}{8} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

3) (655. збирка) Упростити изразе в)  $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin^2 \alpha$

4) (655. збирка) Доказати идентитете

$$\text{д)} \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = \sin^2 \beta$$

5) (658. збирка) Упростити израз: 6)  $\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ}$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 649-651.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Адиционе теореме

**Тип часа:** комбиновани: обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање адиционих формулe

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени адиционе формуле у срећивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** адиционе формуле

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка

$$\text{Поновимо: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

**Главни део часа: 35 минута**

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right)}{\cos \alpha \cos \beta \left( 1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \right)}, \text{ ако је}$$

$\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  закључујемо

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}}.$$

Ако уместо  $\beta$  узмемо  $-\beta$  добијамо  $\operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(-\beta)}$ , односно

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Предложити ученицима да на сличан начин изведу адиционе формуле за котангенс:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$$

под условима када су ти изрази дефинисани.

1. Ако је  $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$ , израчунај  $\operatorname{tg}\alpha$ .
2. (654. в) збирка) Упростити израз  $\frac{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\alpha}$
3. (657. збирка) Одредити  $\operatorname{tg}(x + y)$ , ако је  $\operatorname{tg}x = \frac{m}{1+m}$ ,  $\operatorname{tgy} = \frac{1}{1+2m}$
4. (660. збирка) Ако су  $\alpha$  и  $\beta$  оштри углови и ако је  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$  и  $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$ , показати да је  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ .

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 652, 653.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Адиционе теореме

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увежбавање адиционих формулe

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени адиционе формуле у срећивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** адиционе формуле

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка. Понављање адиционих формулe за синус, косинус, тангенс и котангенс.

**Главни део часа: 35 минута**

1. (661. збирка) Ако је  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{q-p}{q+p}$  и  $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  онда је  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$  или  $\alpha + \beta = -\frac{3\pi}{4}$ . Доказати

2. (664. збирка) Ако је  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos \beta = \frac{17\sqrt{2}}{26}$  и  $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  одредити  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ .

3. (665. збирка) Ако је  $\alpha > 0^\circ$ ,  $\beta > 0^\circ$ ,  $\alpha + \beta = 60^\circ$  и  $\cos \alpha = \frac{11}{13}$ , одредити  $\cos \beta$ .

4. (667. збирка) Доказати да израз  $A = \sin^2(\alpha + x) - 2 \sin \alpha \cos x \sin(\alpha + x) + \cos^2 x$  не зависи од  $x$ .

5. (676. збирка) Доказати идентитет:  $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + x) - \operatorname{tg}(45^\circ - x)}{\operatorname{tg}(45^\circ + x) + \operatorname{tg}(45^\circ - x)} = 2 \sin x \cos x$ .
6. (677. збирка) Доказати да је  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  ако су  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  оштри углови и  $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma = 1$ .

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 662, 663, 666, 668.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске функције двоструког угла

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање формула за тригонометријске функције двоструког угла

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени формуле за тригонометријске функције двоструког угла у сређивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријске формуле

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка

Поновити адиционе формуле.

**Главни део часа: 35 минута**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \text{ ако узмемо да је } \beta = \alpha \text{ биће } \boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \text{ ако узмемо да је } \beta = \alpha \text{ биће } \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\tg(\alpha + \beta) = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \tg \beta} \text{ ако узмемо да је } \beta = \alpha \text{ биће } \boxed{\tg 2\alpha = \frac{2\tg \alpha}{1 - \tg^2 \alpha}}, \quad \tg \alpha \neq \pm 1, \cos \alpha \neq 0$$

$$\ctg(\alpha + \beta) = \frac{\ctg \alpha \ctg \beta - 1}{\ctg \alpha + \ctg \beta}, \text{ ако узмемо да је } \beta = \alpha \text{ биће } \boxed{\ctg 2\alpha = \frac{\ctg^2 \alpha - 1}{2\ctg \alpha}}, \quad \ctg \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0$$

Ако је  $\sin \alpha = 0,8$ ,  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , израчунати  $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \tg 2\alpha, \ctg 2\alpha$ .

1. Одреди вредност израза  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$  ако је  $\cos 2\alpha = 0,4$
2. Одреди вредност израза  $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$  ако је  $\cos 4\alpha = 0,5$
3. (Пријемни испит, ЕТФ 2009) Ако је  $\tg \alpha = \frac{1}{2}$  и  $\tg \beta = -\frac{1}{3}$  израчунај вредност израза  $\frac{\sin \alpha + \sin(\alpha - 2\beta)}{\cos \alpha + \cos(\alpha - 2\beta)}$ .
4. (Пријемни испит, ЕТФ 2006) Ако је  $\cos 2\alpha = -\frac{63}{65}$ ,  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  и  $\cos \beta = \frac{7}{\sqrt{130}}$ ,  $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  колико је  $\alpha + \beta$ ?

Напомена: Веома често се у рачунским задацима користе изрази

$$\boxed{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha}$$

$\boxed{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha}$  који се лако изводе.

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 687, 689.

Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске функције двоструког угла

## Тип часа: утврђивање

#### **Облик рада: фронтални**

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

### **Наставна средства: збирка**

**Циљ часа:** Увежбавање формула за тригонометријске функције двоструког угла

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени формуле у сређивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

## **Стандарт уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

## В.Минин, Я.К.Нівановін, С.Стівановін Кључні поімови· функції є двострукого угла

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка. Понављање формула за тригонометријске функције двоструког угла

## Главни део часа: 35 минута

- Израчунати  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 15^\circ}$
  - (684. збирка) Доказати; а)  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$   
 $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$  6)
  - (694. збирка) Израчунати  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ , ако је  $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$
  - (703. збирка) Одредити  $\sin^2 2\alpha$ , ако је  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = 7$
  - (713. збирка) Ако су  $\alpha$  и  $\beta$  оштри углови за које је  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$ , и  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$ , тада је  
 $\alpha + 2\beta = 45^\circ$ . Доказати.

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак: Збирка: 685,690,691, 692. задатак

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске функције двоструког угла

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** групни

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Увежбавање формула за тригонометријске функције двоструког угла

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени формуле у сређивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање социјалних вештина, комуникације, критичког односа према сопственом раду

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, врши поделу ученика у групе

**Активност ученика:** Учествују у раду групе

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** функције двоструког угла

### Уводни део часа: 5 минута.

Подела ученика у групе, исписивање редних бројева задатака које ученици раде.

### Главни део часа: 30 минута.

1. (693. збирка) Знајући да је  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$  израчунати

$$\text{а)} \sin \frac{2\pi}{3} \quad \text{б)} \cos \frac{2\pi}{3} \quad \text{в)} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \quad \text{г)} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}$$

2. (699. збирка) Доказати идентитет:  $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - 0,5 \sin^2 2\alpha$

3. (701. збирка) Доказати идентитет:  $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

4. (705. збирка) Ако је  $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$ , израчунати

$$\text{а)} \sin 2x \quad \text{б)} \cos 2x \quad \text{в)} \operatorname{tg} 2x \quad \text{г)} \operatorname{ctg} 2x$$

5. (706. збирка) Шта је веће  $\operatorname{tg} 2\alpha$  или  $2\operatorname{tg} \alpha$ , ако  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

### Завршни део часа: 10 минута.

Анализа урађених задатака и рада група

Домаћи задатак из збирке: 695, 697, 698, 700.



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске функције двоструког угла

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Увежбавање формула за тригонометријске функције двоструког угла и примена

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени формуле у сређивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** функције двоструког угла

### Уводни део часа: 5 минута.

Контрола домаћег задатка. Понављање формула за тригонометријске функције двоструког угла

### Главни део часа: 35 минута

1. Израчунај вредност израза  $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ$

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ &= \frac{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \\ \text{Решење} \quad &= \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. Израчунај вредност израза  $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ &= \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \\ \text{Решење} \quad &= \frac{2 \sin 72^\circ \cos 72^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(704. збирка) Упростити израз а)  $A = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$

3. (708. збирка) Доказати а)  $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$  б)  $\frac{1}{\cos 15^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ} = 8 \sin 75^\circ$

4. (724. збирка) Доказати да је  $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

Решење

Користимо  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ &= \sin 20^\circ \cdot \sin(60^\circ - 20^\circ) \cdot \sin(60^\circ + 20^\circ) = \\ &= \sin 20^\circ \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 20^\circ \right) \\ &= \sin 20^\circ \cdot \left( \frac{3}{4} \cos^2 20^\circ - \frac{1}{4} \sin^2 20^\circ \right) \\ &= \frac{1}{4} \sin 20^\circ \cdot (3 \cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) \\ &= \frac{1}{4} \sin 20^\circ \cdot (3 - 4 \sin^2 20^\circ) \\ &= \frac{1}{4} \left( 3 \sin 20^\circ - 4 \sin^3 20^\circ \right) \\ &= \frac{1}{4} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

5. (711. збирка) Доказати идентитет  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 709, 710, 712.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске функције половине угла

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање формула за тригонометријске функције половине угла

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени формуле за тригонометријске функције половине угла у сређивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријске формуле

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка

Поновити формуле за двоструке углове и основну тригонометријску идентичност

**Главни део часа: 35 минута**

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha \end{array} \right\} + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha \end{array} \right\} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

Из наведеног се изводи закључак:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

Користећи наведене релације изводимо и

$$\begin{aligned} \tg^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} & \cos \alpha \neq -1 \\ \ctg^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} & \cos \alpha \neq 1 \end{aligned}$$

1. Израчунати  $\sin \frac{\pi}{8}, \cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{12}, \cos \frac{\pi}{12}, \sin \frac{\pi}{24}, \cos \frac{\pi}{24}$
2. Израчунати  $\sin \frac{7\pi}{12}, \cos \frac{3\pi}{16}, \tg \frac{11\pi}{24}$
3. (729. збирка) Израчунати без употребе калкулатора  $\tg 7^\circ 30'$ .
4. (731. збирка) Ако је  $\tg \alpha = \frac{24}{7}$  и  $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ , израчунати  $\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, \tg \frac{\alpha}{2}$ .
5. (735. збирка) Упростити изразе    а)  $12 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{4x}{3} \right)$     б)  $2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) - 1$ .

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 727, 728, 730, 732.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске функције половине угла

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Утврђивање формула за тригонометријске функције половине угла

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени формуле за тригонометријске функције половине угла у срећивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријске формуле

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка

Поновити формуле за половине углова

**Главни део часа: 35 минута**

1. Израчунати  $\cos \frac{\alpha}{2}$  ако је  $\operatorname{tg} \alpha = 4\sqrt{5}$ ,  $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

2. Ако је  $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,2$ , израчунати  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

3. (737. a), збирка) Израчунати без употребе калкулатора

$$\cos^4 \frac{\pi}{8} + 13 \cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$$

4. (741.a), збирка) Одредити  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ , ако је  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$

5. (743, збирка) Доказати да је: а)  $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$  б)  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 2$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 733, 737. б), 741. б), 739.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Трансформација производа тригонометријских функција у збир или разлику

**Тип часа:** комбиновани: обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање и утврђивање формула за трансформацију производа тригонометријских функција у збир или разлику

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени формуле за трансформацију производа тригонометријских функција у збир или разлику у уређивању израза

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријске формуле

### Уводни део часа: 5 минута.

Контрола домаћег задатка  
Поновити адиционе формуле

### Главни део часа: 35 минута

Користећи адиционе формуле

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

сабирањем добијамо:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

односно важи:

$$\boxed{\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

сабирањем добијамо:  $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

односно важи:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

одузимањем добијамо:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

односно важи:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

1. (753. збирка)

Израчунати а)  $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$  б)  $2 \cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$  в)

$$4 \sin\left(1 + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(1 + \frac{\pi}{3}\right)$$

2. (760. збирка) Применом трансформације производа у збир упростити изразе:

а)  $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ$  б)  $\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 80^\circ$

3. Израчунај вредност израза:  $\sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ$

Решење

$$\begin{aligned}
 & \sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ = (\sin 6^\circ \cdot \sin 66^\circ) \cdot (\sin 42^\circ \cdot \sin 78^\circ) = \\
 & = \frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 72^\circ) \frac{1}{2}(\cos 36^\circ - \cos 120^\circ) \\
 & = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \sin 18^\circ\right)\left(\sin 54^\circ + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\sin 54^\circ - \sin 18^\circ \sin 54^\circ\right) \\
 & = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\sin 54^\circ - \frac{1}{2}(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ)\right) \\
 & = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\sin 54^\circ - \frac{1}{2}\sin 54^\circ + \frac{1}{2}\sin 18^\circ\right) = \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

4. (756. збирка) Доказати идентитет  $\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}(2\cos 2\alpha + 1)$

5. (Пријемни испит, СФ 2000 ) Израчунати вредност израза  $4\cos 2000^\circ - \frac{1}{\sin 1990^\circ}$ .

Решење

$$\begin{aligned}
 & 4\cos 2000^\circ - \frac{1}{\sin 1990^\circ} = 4\cos 200^\circ - \frac{1}{\sin 190^\circ} \\
 & = -4\cos 20^\circ + \frac{1}{\sin 10^\circ} = \frac{-4\cos 20^\circ \sin 10^\circ + 1}{\sin 10^\circ} \\
 & = \frac{-4\sin 10^\circ \sin 70^\circ + 1}{\sin 10^\circ} = \frac{-4 \cdot \frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ) + 1}{\sin 10^\circ} = 2
 \end{aligned}$$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 754.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Трансформација збира и разлике тригонометријских функција у производ

**Тип часа:** комбиновани: обрада и утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање и утврђивање формула за трансформацију збира и разлике тригонометријских функција у производ

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да примени формуле за трансформацију збира и разлике тригонометријских функција у производ

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријске формуле

### Уводни део часа: 5 минута.

Контрола домаћег задатка

Поновити адиционе формуле и формуле за претварање производа у збир

### Главни део часа: 35 минута

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad \text{нека је } \alpha + \beta = x, \quad \alpha - \beta = y$$

$$\text{односно} \quad \alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x-y}{2}$$

добијамо

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}$$

Ако у претходној једнакости уместо  $y$  узмемо  $-y$  добијамо  $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad \text{нека је } \alpha + \beta = x, \quad \alpha - \beta = y$$

$$\text{односно } \alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x-y}{2}$$

добијамо

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

нека је  $\alpha + \beta = x, \quad \alpha - \beta = y$

$$\text{односно } \alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x-y}{2}$$

добијамо

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$1. \text{ (765. збирка) Показати да је б) } \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$2. \text{ (773. збирка) Доказати б) } 1 - \sin x = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$3. \text{ (Пријемни испит, ФОН 2016.) Израчунај вредност израза} \\ \sin 6^\circ - \sin 42^\circ - \sin 66^\circ + \sin 78^\circ$$

Решење

$$\begin{aligned} & (\sin 6^\circ - \sin 66^\circ) + (\sin 78^\circ - \sin 42^\circ) = 2 \sin(-30^\circ) \cos 36^\circ + 2 \sin 18^\circ \cos 60^\circ \\ & = -\cos 36^\circ + \sin 18^\circ = \sin 18^\circ - \sin 54^\circ = 2 \cos 36^\circ \sin(-18^\circ) = \frac{-2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 36^\circ} \\ & = \frac{-\sin 72^\circ \sin 18^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{-2 \cos 18^\circ \sin 18^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{-\sin 36^\circ}{2 \sin 36^\circ} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$4. \text{ (784. збирка) Доказати једнакост } \frac{2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}$$

$$5. \text{ (786. збирка) Ако је } \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}, \text{ показати да је } (1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 764, 765.



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** фронтални, индивидуални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** припрема за контролни задатак

**Образовни задатак:** Ученик треба да обнови и примени стечено знање

**Васпитни задатак:** Развијање критичког односа према сопственом раду, развијање самосталности, комуникације, кооперативности и социјалне интегрисаности.

**Функционални задатак:** ученик треба да препозна значај повезивања градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.1.2.7. Примењује тригонометрију правоуглог троугла у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Координира радом ученика

**Активност ученика:** Самостално решавање задатака

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометрија

### Уводни део часа: 5 минута.

Контрола домаћег задатка

### Главни део часа: 35 минута

1. (849. збирка) Испитати ток и нацртати график функције:  $f(x) = \frac{3}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
2. Ако је  $\alpha, \beta > 0$ ,  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$   $\cos \alpha = \frac{11}{13}$  одредити  $\cos \beta$ .
3. Израчунати  $\frac{\sin 80^\circ - \cos 110^\circ}{\cos 100^\circ + \cos 20^\circ}$

Решење 
$$\frac{\sin 80^\circ - \cos 110^\circ}{\cos 100^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{-2 \sin(-50^\circ) \sin 60^\circ}{2 \cos 60^\circ \cos 40^\circ} = \frac{2 \sin 50^\circ \sin 60^\circ}{2 \cos 60^\circ \sin 50^\circ} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

4. Израчунати  $\sin^2 24^\circ - \sin^2 26^\circ$ , ако је  $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Решење

$$\begin{aligned}\sin^2 24^\circ - \sin^2 26^\circ &= \frac{1 - \cos 48^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 12^\circ}{2} = \frac{1}{2} (\cos 12^\circ - \cos 48^\circ) = \\&= \frac{1}{2} (-2) \sin 30^\circ \sin(-18^\circ) = \frac{1}{2} \sin 18^\circ\end{aligned}$$

Користили смо:

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha \quad \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha$$

5. (787, збирка) Доказати идентитет  $\sin 3\alpha \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha \cos 3\alpha = \frac{3}{4} \sin 4\alpha$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Договор у вези са предстојећим контролним задатком

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске једначине

**Тип часа:** комбиновани: обрада, утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Усвајање алгоритама за решавање тригонометријских једначина

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да реши основну тригонометријску једначину и продискутује њена решења

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријска једначина

**Ток првог часа:**

**Уводни део часа: 10 минута.**

Поновити: периодичност тригонометријских функција

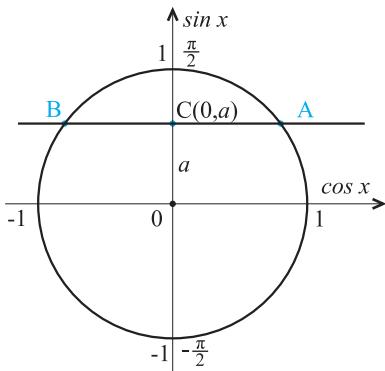
**Главни део часа: 30 минута**

Тригонометријска једначина је једначина у којој се појављују тригонометријске функције.

Тригонометријске једначине ћемо решавати сводећи их на основне тригонометријске једначине

$$\sin x = a \quad \cos x = a \quad \tg x = a \quad \ctg x = a$$

при чему је  $a$  реалан број.



Посматрајмо једначину  $\sin x = a$ . За  $a \in [-1,1]$  једначина имају решења, јер је  $-1 \leq \sin x \leq 1$ .

У интервалу  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  једначина  $\sin x = a$  има јединствено решење које се означава са  $x = \arcsin a$  (читамо аркус синус  $a$ )

(Ознака потиче од латинске речи *arcus*=лук)

Решење једначине  $\sin x = a$  је број  $x$  који представља дужину лука чији је синус једнак  $a$ .

**Нагласити** Само под условом  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  и  $a \in [-1,1]$  једнакости  $\sin x = a$  и  $x = \arcsin a$  су еквивалентне!

**Пример 1.**  $\sin 0 = 0$  ако  $\arcsin 0 = 0$

**Пример 2.**  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  ако  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

**Пример 3.**  $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$  ако  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

**Пример 4.**  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  ако  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

**Пример 5.**  $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$  или  $\arcsin(-1) \neq \frac{3\pi}{2}$

Ако посматрамо  $x \in [0, 2\pi]$  закључујемо да осим у тачки А, права која пролази кроз тачку С( $0, a$ ) и парална је оси  $x$ , сече јединични круг и у тачки В па закључујемо да је и  $x = \pi - \arcsin a$  решење једначине  $\sin x = a$ .

Уопште сва решења једначине  $\sin x = a$  се добијају као последица периодичности синусне функције. Обзиром да за свако реално  $x$  важи  $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , можемо закључити да су сва решења једначине  $\sin x = a$ , под условом  $a \in [-1,1]$ , дата формулама:

$$\boxed{x = \arcsin a + 2k\pi}$$

$$\boxed{x = \pi - \arcsin a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Реши једначине:

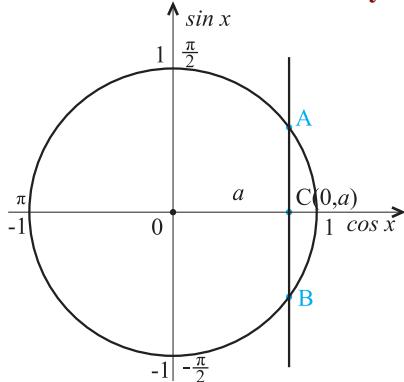
$$1) \sin x = \frac{1}{2} \quad 2) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 3) \sin 9x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 4) \sin\left(8x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \quad 5) \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 855. а, б, ђ), 856. а)

**Ток другог часа:****Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка

**Главни део часа: 35 минута.**

Посматрајмо једначину  $\cos x = a$ . За  $a \in [-1,1]$  једначине имају решења, јер је  $-1 \leq \cos x \leq 1$ .

У интервалу  $[0, \pi]$  једначина  $\cos x = a$  има јединствено решење које се означава са  $x = \arccos a$  (читамо *аркус косинус a*)

**Нагласити** Само под условом  $[0, \pi]$  и  $a \in [-1,1]$  једнакости  $\cos x = a$  и  $x = \arccos a$  су еквивалентне!

**Пример 1.**  $\cos 0 = 1$  ако  $\arccos 1 = 0$

**Пример 2.**  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  ако  $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

**Пример 3.**  $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$  ако  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

**Пример 4.**  $\cos\frac{\pi}{2} = 0$  ако  $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

**Пример 5.**  $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  или  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \neq \frac{7\pi}{6}$

Ако посматрамо  $x \in [0, 2\pi]$  закључујемо да осим у тачки A, права која пролази кроз тачку D(a,0) и парална је оси y, сече јединични круг и у тачки B, па закључујемо да је и  $x = -\arccos a$  решење једначине  $\cos x = a$ .

Уопште сва решења једначине  $\cos x = a$  се добијају као последица периодичности косинусне функције. Обзиром да за свако реално x важи  $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , можемо закључити да су сва решења једначине  $\cos x = a$ , под условом  $a \in [-1,1]$ , дата формулама:

$$\boxed{x = \arccos a + 2k\pi}$$

$$\boxed{x = -\arccos a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Реши једначине:

$$1) \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3) \cos 6x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4) \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$5) \cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$6) 2\sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$7) 1 - 4\cos^2 x = 0$$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 855. в, г, д), 856. б)

**Ток трећег часа:**

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка

**Главни део часа: 35 минута.**

Посматрајмо једначину  $\operatorname{tg} x = a$ . Наведена једначина има решења за сваки реални број  $a$ .

Једначина  $\operatorname{tg} x = a$  има само једно решење на интервалу  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  и то решење означавамо са

$x = \operatorname{arctg} a$ . Сва решења једначине  $\operatorname{tg} x = a$  дата су формулом  $x = \operatorname{arctg} a + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , при чему се опет ослањамо на перодичност тангенсне функције ( $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ )

**Пример 1.**  $\operatorname{tg} 0 = 0$  ако  $\operatorname{arctg} 0 = 0$

**Пример 2.**  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$  ако  $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{2}} 3 = \frac{\pi}{3}$

**Пример 3.**  $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$  ако  $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

**Пример 4.**  $\tg \frac{\pi}{4} = 1$  ако  $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$

**Пример 5.**  $\tg \frac{3\pi}{4} = -1$  или  $\arctg(-1) \neq \frac{3\pi}{4}$

Реши једначине:

$$1) \tg x = -\sqrt{3} \quad 2) \tg 5x = 1 \quad 3) \tg\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Посматрајмо једначину  $\ctg x = a$ . Наведена једначина има решења за сваки реални број  $a$ .

Једначина  $\ctg x = a$  има само једно решење на интервалу  $(0, \pi)$  и то решење означавамо са  $x = \arccot a$ . Сва решења једначине  $\ctg x = a$  дата су формулом  $x = \arccot a + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , при чему се опет ослањамо на перодичност тангенсне функције ( $\ctg(x + k\pi) = \ctg x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ )

**Пример 1.**  $\ctg \frac{\pi}{4} = 1$  ако  $\arccot 1 = \frac{\pi}{4}$

**Пример 2.**  $\ctg \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ако  $\arccot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$

**Пример 3.**  $\ctg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  ако  $\arccot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$

**Пример 4.**  $\ctg \frac{\pi}{2} = 0$  ако  $\arccot 0 = \frac{\pi}{2}$

**Пример 5.**  $\ctg \frac{7\pi}{6} = \sqrt{3}$  или  $\arccot(\sqrt{3}) \neq \frac{7\pi}{6}$

Реши једначине:

$$1) \ctg x = 1$$

$$2) \ctg x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3) \ctg 12x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4) \ctg\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 887.



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске једначине

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да реши основну тригонометријску једначину и продискутује њена решења, да применом различитих трансформација дату једначину сведе на основну тригонометријску једначину.

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријска једначина

### Ток првог часа

#### Уводни део часа: 5 минута.

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

#### Главни део часа: 35 минута

Реши једначине:

- 1)  $\sin|x| = 1$
- 2)  $|\sin x| = 1$
- 3)  $4\sin^2 x - 3 = 0$
- 4)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$
- 5)  $\sin 3x \cdot \sin(1-x) = 0$

Додатни задаци

6)  $\sin \frac{x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

7)  $\sin x = \cos x$

8)  $\operatorname{tg}|x - 2| = -1$

9)  $\sin^2 x + 2 \sin x = 0$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 892-895.

**Ток другог часа**

**Уводни део часа: 5 минута**

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

**Главни део часа: 35 минута**

Реши једначине:

1)  $\sin \frac{3x}{2} \cos x = 0$

2)  $\cos 3x + \cos 5x = 0$

3)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sqrt{2}$

4)  $\cos 2x - \sqrt{2} \sin x \cos 2x = 0$

5)  $\operatorname{tg} 3x \cos x = 0$

6)  $3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$

Додатни задаци

7)  $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

8)  $\cos x + \cos 2x = 0$

9)  $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

10)  $2 \sin^2 x + 2 \sin x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3}$

**Завршни део часа: 5 минута**

Домаћи задатак из збирке: 953-956.

## Ток трећег часа

### Уводни део часа: 5 минута

Контрола домаћег задатка и решавање задатака који нису били јасни.

### Главни део часа: 35 минута

Реши једначине:

- 1)  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$
- 2)  $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$
- 3)  $\cos^6 x + \sin^6 x = 4 \sin^2 2x$
- 4)  $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$
- 5)  $\sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x = 1$

Додатни задаци

- 6)  $2 \sin^2 x + (\sqrt{3} - 1) \cos x (\sin x - \cos x) = 1$
- 7)  $3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin 2x + 7 \cos^2 x = 1$
- 8)  $\cos \frac{\pi}{6} \sin x + \sin \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

### Завршни део часа: 5 минута

Домаћи задатак из збирке: 957-960.



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске једначине

**Тип часа:** вежбање

**Облик рада:** групни

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака.

**Наставна средства:** збирка, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да реши основну тригонометријску једначину и продискутује њена решења, да применом различитих трансформација дату једначину сведе на основну тригонометријску једначину.

**Васпитни задатак:** Развијање социјалних вештина, комуникације, самокритичности

**Функционални задатак:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, врши поделу ученика у групе

**Активност ученика:** Учествују у раду групе

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријска једначина

**Уводни део часа: 5 минута.**

Подела ученика у групе

**Главни део часа: 30 минута.**

Решити једначине

1) (897, збирка)  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

2) (902. збирка)  $4 \sin 2x \cos 2x + 1 = 0$  на интервалу  $(0, \pi)$

3) (908. збирка)  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}$

4) (916. збирка)  $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$

5) (918. збирка)  $\sin 3x + \cos 2x = 1$

**Завршни део часа: 10 минута.**

На табли се кроз презентације поставе решења и врши се дискусија задатака  
домаћи задатак из збирке: 904, 905, 906



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске једначине

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** наставни листићи

**Циљ часа:** Оспособити ученике да се сналазе приликом решавања задатака који се уобичајено појављују на пријемним испитима

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да реши основну тригонометријску једначину и продискутује њена решења, да применом различитих трансформација дату једначину сведе на основну тригонометријску једначину.

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријска једначина

## Ток првог часа

### Уводни део часа: 5 минута.

Наставник даје упутства ученицима на који начин могу пронаћи задатке са пријемних испита за факултете.

### Главни део часа: 35 минута

- (Пријемни испит, САО и ФОН, 2002.)

Одреди збир квадрата највећег негативног и најмањег позитивног решења једначине:

$$\cos 2x + \sin^4 \frac{x}{2} = \cos^4 \frac{x}{2}$$

- (Пријемни испит, ЕТФ и ПМФ, 2002)

Колико решења на интервалу  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  има једначина  $\cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2}$ .

- (Пријемни испит, ФОН, 2003)

Колико решења на интервалу  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  има једначина

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos^2 x.$$

4. (Пријемни испит, ЕТФ, 2003.)

Колико решења на интервалу  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  има једначина  $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2}} = 1$ .

5. (Пријемни испит, ПМФ, 2004)

Колико решења на интервалу  $[0, 2\pi]$  има једначина  $\sin 2x = \cos x$ .

6. (Пријемни испит, ЕТФ, 2008)

Одреди збир свих решења једначине  $\sin 2x = 1 + \sqrt{2} \cos x + \cos 2x$  на интервалу  $(0, 2\pi)$ .

### Завршни део часа: 5 минута.

Домаћи задатак из збирке: 910, 911, 912

### Ток другог часа

### Уводни део часа: 5 минута.

Контрола домаћег задатка

### Главни део часа: 35 минута

1. (Пријемни испит, ФОН, 2008.)

Одреди збир квадрата највећег негативног и најмањег позитивног решења једначине:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

2. (Пријемни испит, ФОН, 2009.)

Колико решења на интервалу  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  има једначина  $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$ .

3. (Пријемни испит, ЕТФ, 2010. )

Колико решења на интервалу  $[0,2\pi]$  има једначина  $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x$ .

4. (Пријемни испит, ЕТФ, 2011.)

Одреди збир свих реалних решења једначине  $\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{2}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{2}} = 2$  на интервалу  $[0,2\pi]$

5. (Пријемни испит, ЕТФ, 2012.)

Одреди број решења једначине  $3\tg^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$  на интервалу  $(0,2\pi)$ .

6. (Пријемни испит, ЕТФ, 2016.)

Одреди број решења једначине  $\cos x + \cos 2x + 2\cos^2 \frac{3x}{2} + \cos 4x = \frac{1}{2}$  на интервалу  $[0,2\pi]$ .

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 913, 914, 915.



Редни број часа: \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске једначине - графичко решавање

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Повезати графички приказ тригонометријске функције са егзистенцијом решења једначине

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да нацрта тригонометријску функцију и са графика да „прочита“ решења

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, користећи рачунар приказује решења једначине у Геогебри

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника, самостално цртају функције и упоређују са задацима на презентацији

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријска функција

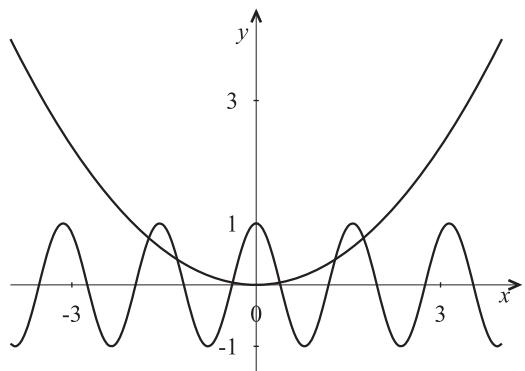
**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка

**Главни део часа: 35 минута**

1. Колико решења има једначина  $\cos 4x = \frac{x^2}{4}$  ?

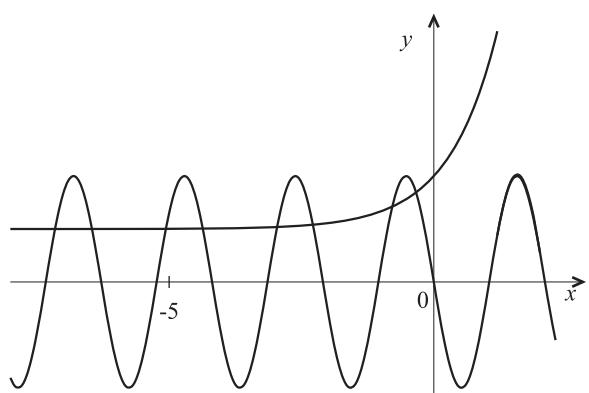
Решење дато на слици десно.



2. Колико решења има једначина

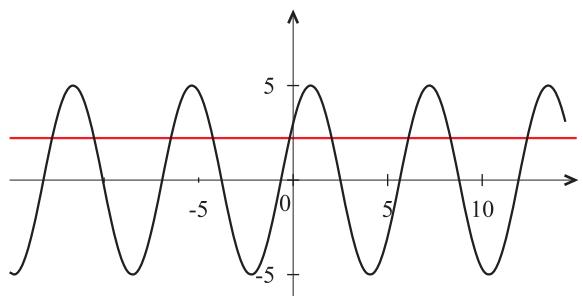
$$2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 3^x + 1 ?$$

Решење дато на слици десно.



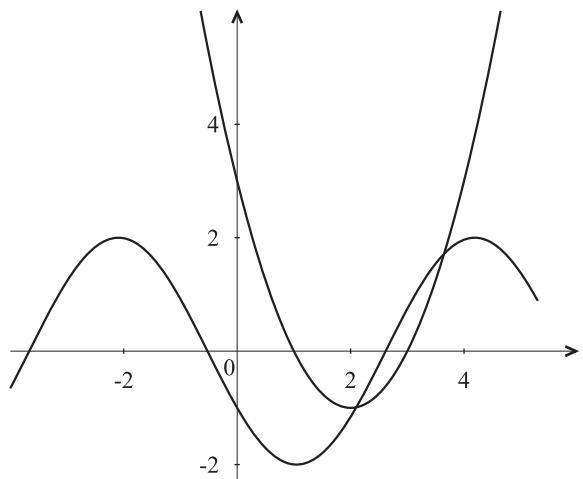
3. Коју вредност може да има параметар  $a$  би једначина  $4 \sin x + 3 \cos x = a$  имала решења?

Решење дато на слици десно.



4. Колико решења има једначина  
 $-2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = x^2 - 4x + 3$  ?

Решење дато на слици десно.



**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 1019., 1023.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске неједначине

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, рачунар, пројектор

**Циљ часа:** Усвајање поступка решавања тригонометријских неједначина

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна да применом различитих трансформација дату неједначину сведе на основну тригонометријску неједначину, да реши основну тригонометријску неједначину и продискутује њена решења,

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријска неједначина

### Уводни део часа: 5 минута.

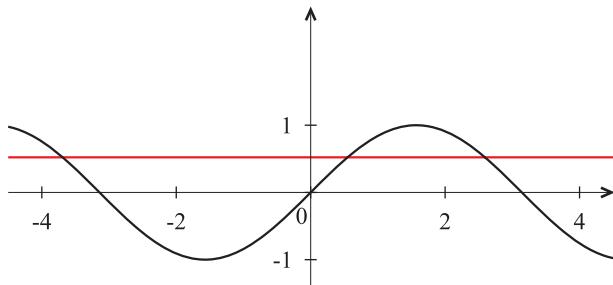
Контрола домаћег задатка

### Главни део часа: 35 минута

Размотрићемо неке једноставније тригонометријске неједначине по непознатој  $x$ .

Посматрајмо неједначину ( $a$  је реалан број):  $\sin x > a$ .

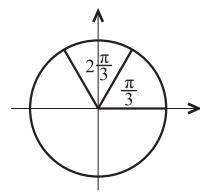
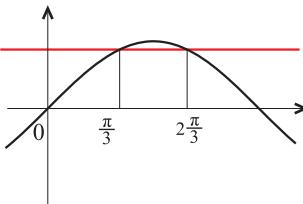
- Ако је  $a < -1$  неједначину  $\sin x > a$  задовољавају сви реални бројеви  $x$
- Ако је  $a > 1$  тада не постоји реалан број  $x$  тако да важи  $\sin x > a$
- Ако је  $a = 1$  неједначина  $\sin x > a$  нема решења
- Ако је  $a = -1$  неједнакост  $\sin x > a$  је тачна за сваки реалан број  $x$
- Ако  $a \in (-1, 1)$  бројеви  $x$  за које важи  $\sin x > a$  су они бројеви за које је синусоида  $y = \sin x$  изнад праве  $y = a$



Синусоида  $y = \sin x$  и права  $y = a$  имају бесконачно много заједничких тачака.

**Пример 1.** Решити неједначину

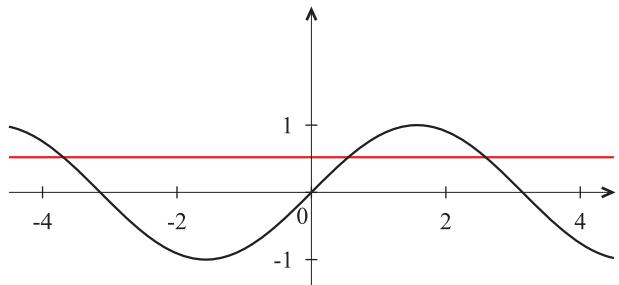
$$2\sin x - \sqrt{3} > 0$$



1. Решити неједначину  $2\sin x + 1 > 0$
2. Решити неједначину  $2\sin x - 1 \geq 0$

Посматрајмо неједначину ( $a$  је реалан број ):  $\sin x < a$  .

- Ако је  $a < -1$  тада не постоји реалан број  $x$  тако да важи  $\sin x < a$
- Ако је  $a > 1$  неједначину  $\sin x < a$  задовољавају сви реални бројеви  $x$
- Ако је  $a = -1$  неједначина  $\sin x < a$  нема решења
- Ако је  $a = 1$  неједнакост  $\sin x < a$  је тачна за сваки реалан број  $x$
- Ако  $a \in (-1,1)$  бројеви  $x$  за које важи  
 $\sin x < a$  су они бројеви за које је  
синусоида  $y = \sin x$  испод праве  
 $y = a$



3. Решити неједначину  $2\sin x - \sqrt{3} < 0$
4. Решити неједначину  $2\sin x + 1 < 0$
5. Решити неједначину  $2\sin x - 1 \leq 0$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак :  $2\sin x - \sqrt{2} \geq 0$  ,  $\sin x - 1 > 0$  ,  $2\sin x - \sqrt{2} < 0$  ,  $\sin x + 1 > 0$  ,  $\sin x + 1 \leq 0$

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Тригонометријске неједначине

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Ученик треба да обнови и примени стечена знања из пређене наставне јединице

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометријска неједначина

### Ток првог часа

#### Уводни део часа: 5 минута.

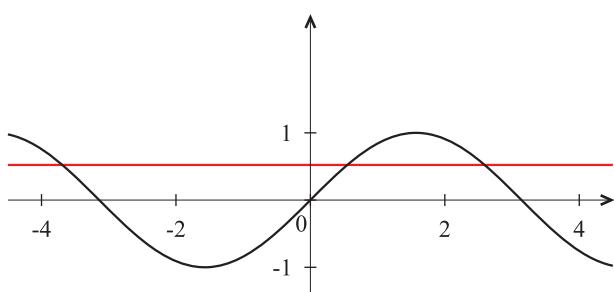
Контрола домаћег задатка.

#### Главни део часа: 35 минута

Заједно са ученицима изводити закључке:

Посматрајмо неједначину ( $a$  је реалан број ):  $\cos x > a$ .

- Ако је  $a < -1$  неједначину  $\cos x > a$  задовољавају сви реални бројеви  $x$
- Ако је  $a > 1$  тада не постоји реалан број  $x$  тако да важи  $\cos x > a$
- Ако је  $a = 1$  неједначина  $\cos x > a$  нема решења
- Ако је  $a = -1$  неједнакост  $\cos x > a$  је тачна за сваки реалан број  $x$
- Ако  $a \in (-1,1)$  бројеви  $x$  за које важи  $\cos x > a$  су они бројеви за које је



косинусоида  $y = \cos x$  изнад праве  $y = a$

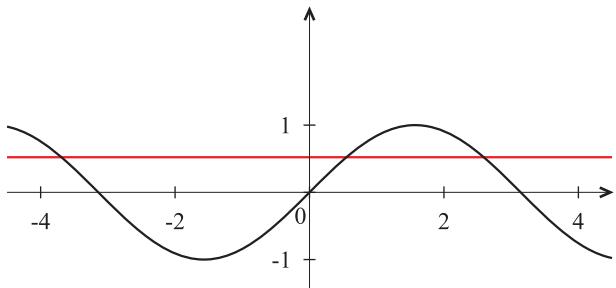
Косинусоида  $y = \cos x$  и права  $y = a$  имају бесконачно много заједничких тачака.

### Примери.

1. Решити неједначину  $2\cos x - \sqrt{3} > 0$
2. Решити неједначину  $2\cos x + 1 > 0$
3. Решити неједначину  $2\cos x - 1 \geq 0$

Посматрајмо једначину ( $a$  је реалан број):  $\cos x < a$ .

- Ако је  $a < -1$  тада не постоји реалан број  $x$  тако да важи  $\cos x < a$
- Ако је  $a > 1$  неједначину  $\cos x < a$  задовољавају сви реални бројеви  $x$
- Ако је  $a = -1$  неједначина  $\cos x < a$  нема решења
- Ако је  $a = 1$  неједнакост  $\cos x < a$  је тачна за сваки реалан број  $x$
- Ако  $a \in (-1, 1)$  бројеви  $x$  за које важи  $\cos x < a$  су они бројеви за које је косинусоида  $y = \cos x$  испод праве  $y = a$



### Примери.

4. Решити неједначину  $2\cos x - \sqrt{3} < 0$
5. Решити неједначину  $2\cos x + 1 < 0$
6. Решити неједначину  $2\cos x - 1 \leq 0$
7. (974. збирка) Решити неједначину:  $\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{60} < \frac{1}{2}$

### Завршни део часа: 5 минута.

Домаћи задатак :  $2\cos x - \sqrt{2} \geq 0$  ,  $\cos x - 1 > 0$  ,  $2\cos x - \sqrt{2} < 0$  ,  $\cos x + 1 > 0$  ,  $\cos x + 1 \leq 0$

**Ток другог часа**

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка.

**Главни део часа: 35 минута**

Решити неједначине:

1. (973. збирка) a)  $\sin x - \cos x > 0$
2. (975. збирка)  $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x > 0$
3. (976. збирка)  $\cos 2x - \sin 2x \geq 0$
4. (978. збирка)  $2 \sin x \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
5. (980. збирка)  $\operatorname{ctg}(\pi - x) < -1$
6. (981. збирка) a)  $\cos x - \sin x < 1$       b)  $\operatorname{tg} x - \sin x > 0$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 972. в, г), 973. б), 977, 979.



**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Синусна и косинусна теорема

**Тип часа:** обрада

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** збирка, калкулатор

**Циљ часа:** Научити на који начин се у троуглу на основу познатих елемената рачунају непознати

**Образовни задатак:** Ученик треба да зна релације које повезују странице и углове произвoльнog троугла

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Примена синусне и косинусне теореме у решавању геометријских задатака

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.3.2.5. Примењује тригонометријске функције у проблемим

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

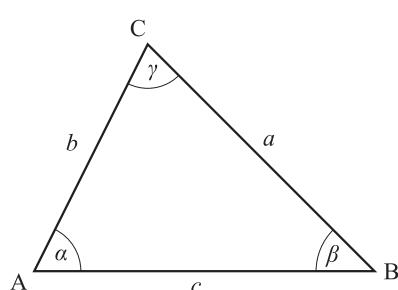
**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** синусна теорема, косинусна теорема

**Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка.

**Главни део часа: 35 минута**



Нека је  $\triangle ABC$  произвољан троугао и нека је  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$ ,  $c = |AB|$ . Нека су  $\alpha, \beta, \gamma$  редом мере углова код темена  $A, B, C$ .

Синусна теорема: 
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Косинусна теорема: 
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Синусна и косинусна теорема представљају основне једнакости које повезују странице и углове троугла.

Приликом „решавања троугла“ разликоваћемо следеће ситуације:

- Дате су све три странице  $a, b, c$  троугла, што значи да треба одредити углове.

**Пример 1.**  $a = 7, b = 5, c = 8$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \quad \text{закључујемо } \alpha = 60^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx 0,7857 \quad \text{уз помоћ калкулатора утврђујемо } \beta = 38^\circ 11'$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 81^\circ 49'$$

- Дате су две странице и угао између њих:

**Пример 2.**  $a = 7, b = 3, \gamma = 82^\circ 30'$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- Дата је једна страница и углови налегли на њу:

**Пример 3.**  $a = 3, \beta = 30^\circ, \gamma = 70^\circ$ . Одавде се лако добија угао  $\alpha$ , а затим се користи синусна теорема

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

- Дате су две странице и угао наспрам једне од њих:

**Пример 4.**  $a = 10, b = 18, \alpha = 28^\circ 35'$

Користи се синусна теорема

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 1034. a), 1035. a), 1036. a), 1037. a)

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Синусна и косинусна теорема

## Тип часа: утврђивање

## Облик рада: фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

## **Наставна средства: збирка**

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Ученик треба да обнови и примени стечена знања из пређене наставне јединице

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

#### **Функционални задатак:** Повезивање градива

## **Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

2.МА.3.2.5. Примењује тригонометријске функције у проблемима

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићин, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** синусна теорема, косинусна теорема

## Ток првог часа:

## **Уводни део часа: 5 минута.**

## Контрола домаћег задатка.

Поновити синусну и косинусну теорему, и површину троугла  $P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$

**Главни део часа: 35 минута**

1. (1038. збирка) Реши троугао без употребе рачунских помагала
    - $a = 2\sqrt{2}, \beta = 45^\circ, \gamma = 120^\circ$
    - $a = 3 + \sqrt{3}, b = 3\sqrt{2}, \alpha = 75^\circ$
  2. (1040. збирка) Дужине страница једног троугла су  $a-2$ ,  $a$  и  $a+2$ , а један угао троугла је  $120^\circ$ . Одредити  $a$ .
  3. (1041. збирка) Нека је у троуглу ABC  $c = 2, a : b = \sqrt{7} : 3, \alpha = 60^\circ$ . Израчунати странице троугла.

4. (1043. збирка) У троуглу ABC је  $b + c = 7$ ,  $a = \sqrt{19}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ . Израчунати странице и површину троугла.
5. (1044. збирка) Израчунати дужину полупречника описаног круга троугла ABC чије су странице  $AB = 6\text{cm}$ ,  $AC = 10\text{cm}$ , а висина  $AD = 5\text{cm}$ .

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 1038. в, г), 1039, 1042.

**Ток другог часа:****Уводни део часа: 5 минута.**

Контрола домаћег задатка.

Поновити синусну и косинусну теорему. Површина троугла  $P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$

**Главни део часа: 35 минута**

1. (Пријемни испит, CAO 2016.) Ако су  $b = 20$ ,  $c = 10$  странице, а  $\alpha = 60^\circ$  угао троугла ABC израчунај површину тог троугла.
2. (Пријемни испит, ФОН 2015.) Угао код темена В троугла ABC два пута је већи од угла код темена А. Ако је  $|AC| = \sqrt{3}\text{cm}$ ,  $|BC| = 1\text{cm}$  одреди дужину странице AB.
3. (Пријемни испит, ФОН 2014.) Дужина странице AB троугла ABC је  $2\sqrt{6}\text{cm}$ , а унутрашњи угао наспрам те странице је  $60^\circ$ . Ако је површина датог троугла једнака  $\sqrt{3}\text{cm}^2$  одреди збир дужина страница AC и BC.
4. (Пријемни испит, ЕТФ 2016.) Дат је троугао ABC са страницима  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AC = \sqrt{3}$ . Нека је тачка D на страници BC тако да је  $\angle BAD = 30^\circ$ ,  $\angle CAD = 45^\circ$ . Израчунај дужину дужи AD.
5. (Пријемни испит, ЕТФ 2016.) У једнакокраком троуглу ABC је  $AB = AC = b$  и  $\angle BAC = 30^\circ$ . Одреди збир висина тог троугла.

**Завршни део часа: 5 минута.**

Домаћи задатак из збирке: 1045, 1046.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Припрема за четврти писмени задатак

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** наставни листићи

**Циљ часа:** Понављање, утврђивање и систематизација градива

**Образовни задатак:** Ученик треба да процени степен усвојености градива

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Схватање значаја повезивања и систематизације градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В.Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** синусна теорема, косинусна теорема

### Уводни део часа: 5 минута.

Контрола домаћег задатка.

### Главни део часа: 35 минута

1. Израчунати  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$  ако је  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$  и  $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ .
2. Доказати идентитет:  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$
3. Упростити израз: 
$$\frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{20\pi}{3}\right) \cdot \sin(-1385^\circ) \cdot \cos\frac{21\pi}{4}}{\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{ctg}(-585^\circ) \cdot \cos 575^\circ}$$
4. Реши једначину:  $\cos x = \cos 3x + 2 \sin 2x$
5. Нацртај функцију  $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
6. Решити троугао:  $b = 6$ ,  $\alpha = 37^\circ 25'$ ,  $\gamma = 102^\circ 45'$

**Завршни део часа: 5 минута.**

Договор у вези са четвртим писменим задатком.

**Редни број часа:** \_\_\_\_\_

**Наставна јединица:** Комбиновани задаци

**Тип часа:** утврђивање

**Облик рада:** фронтални

**Наставне методе:** дијалог, решавање задатака, хеуристичка метода.

**Наставна средства:** наставни листићи

**Циљ часа:** Проширивање стеченог знања

**Образовни задатак:** Ученик треба да обнови и примени стечена знања из пређене наставне јединице

**Васпитни задатак:** Развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичког приступа у решавању проблема, развијање уредности, систематичности и прегледног записивања проблема.

**Функционални задатак:** Повезивање градива

**Стандард уз наставну јединицу:**

2.МА.2.2.5. Примењује тригонометријске функције у једноставним реалним ситуацијама.

**Активност наставника:** Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода

**Активност ученика:** Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави

**Литература:** Збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа, аутори: Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика за други разред средње школе, аутори: В. Мићић, Ж. Ивановић, С. Огњановић

**Кључни појмови:** тригонометрија, једначине

**Ток првог часа:**

**Уводни део часа: 5 минута.**

Поновити кроз дискусију основне појмове из тригонометрије.

**Главни део часа: 35 минута**

1. Реши једначину:  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
2. Ако је  $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  одреди вредност израза  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ .
3. Доказати идентитет:  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$
4. Упростити израз: 
$$\frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{20\pi}{3}\right) \cdot \sin(-1385^\circ) \cdot \cos\frac{21\pi}{4}}{\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{ctg}(-585^\circ) \cdot \cos 575^\circ}$$
5. Са светионика висине 120m изнад мора види се брод под углом од  $15^\circ 30'$ . Колико је брод удаљен од светионика?

**Завршни део часа: 5 минута.**

Дискусија задатака

**Ток другог часа:****Уводни део часа: 5 минута.**

Подела задатаа на наставним листићима.

**Главни део часа: 35 минута**

1. Доказати идентитет:

$$\text{a) } \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3} \quad \text{б) } \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

2. Проверити да ли је тачна једнакост: а)  $\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$ 

$$\text{б) } \frac{1}{\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

3. Реши једначину: а)  $8 \sin^2 x + 6 \cos x = 3$       б)  $\cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{4}$ 4. Решити правоугли троугао: а)  $a = 9$       б)  $t_c = 5$        $a = 6$ 5. Израчунати:  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos 2\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2 \tan \alpha} + \sin^2 \alpha$ **Завршни део часа: 5 минута**

Дискусија задатака